



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

**ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DA DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE E
DO RELEVO DO EMBASAMENTO EM BACIAS SEDIMENTARES VIA
INVERSÃO GRAVIMÉTRICA**

Belém

2015

ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

**ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DA DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE E
DO RELEVO DO EMBASAMENTO EM BACIAS SEDIMENTARES VIA
INVERSÃO GRAVIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Gravimétrico e Magnético.

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Belém

2015

ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

**ESTIMAÇÃO SIMULTÂNEA DA DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE E
DO RELEVO DO EMBASAMENTO EM BACIAS SEDIMENTARES VIA
INVERSÃO GRAVIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 17 / 03 / 2015

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Cristiano Mendel Martins – Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará



Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva – Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Oeste Pará



Prof. Dr.ª Valéria Cristina Ferreira Barbosa – Membro
Doutor em Geofísica
Observatório Nacional

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
(Biblioteca do Instituto de Geociências/UFGA)

França, Érico Tenório, 1989-

Estimação simultânea da distribuição de densidade e do relevo do embasamento em bacias sedimentares via inversão gravimétrica / Érico Tenório França. – 2015.

74 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2015.

1. Bacias Sedimentares. 2. Rochas - Densidade. 3. Inversão (Geofísica). 4. Gravidade (Física) - Medição. I. Título.

CDD 22. ed. 551.303

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, especialmente, a minha mãe e minha avó pelo incentivo e dedicação.

Aos amigos e colegas de trabalho que puderam me ajudar direta ou indiretamente durante esses anos de mestrado.

Ao professor Cristiano Mendel pela paciência e pelos ensinamentos que levarei para minha vida acadêmica e como experiência de vida.

Por fim, ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica pela infraestrutura e capacitação e a CAPES pelo suporte e investimento em forma de bolsa de estudo.

“O mais competente não discute, domina a sua ciência e cala-se.” (Voltaire)

RESUMO

Apresentamos um novo método para estimar simultaneamente a superfície do relevo do embasamento de bacias sedimentares 2D e a distribuição da densidade no pacote sedimentar via inversão gravimétrica. Presumimos que a bacia sedimentar é caracterizada por embasamento homogêneo e que o contraste de densidade com o pacote sedimentar é constante para uma mesma camada horizontal, mas diminui para camadas mais profundas segundo lei linear. Discretizamos a subsuperfície que contem a bacia em uma malha regular de prismas justapostos, cujos contrastes de densidade são os parâmetros a serem estimados. A solução do problema inverso estabilizado é obtida pela introdução de informação a priori, através de funções de regularização. No entanto, a estimativa da propriedade física pode resultar em soluções que tendem a ser harmônicas. A fim de evitar essa tendência, introduzimos vínculos construídos para quebrar a harmonicidade nas soluções. Dentre eles, apresentamos dois vínculos que selecionam superfícies separando sedimento e embasamento. Estas superfícies selecionadas iterativamente convergem para o relevo do embasamento. Aplicamos esta metodologia em dados sintéticos em duas condições: quando temos informação de perfil de poços e quando não temos. Em ambos os resultados, obtivemos soluções concorrentes e muito próximas do modelo verdadeiro. Aplicamos também esta metodologia ao conjunto de dados da Bacia do Recôncavo e a estimativa do relevo do embasamento delineou uma interface consoante com trabalhos anteriores. Adicionalmente, otimizamos o tempo computacional para o cálculo da anomalia gravimétrica bem como da matriz sensibilidade. Essa otimização é favorecida pela geometria fixa do modelo interpretativo, pois evitamos recalcular alguns termos dos cálculos necessários para avaliar os elementos da matriz sensibilidade. Uma vez calculada a matriz sensibilidade, a anomalia gravimétrica calculada é obtida facilmente.

Palavras-chave: Bacias Sedimentares. Relevo do Embasamento. Contraste de Densidade. Inversão Gravimétrica.

ABSTRACT

We present a new method to simultaneously estimate the relief surface of the basement of 2D sedimentary basins and the density distribution in the sedimentary pack via gravimetric inversion. We assume that the sedimentary basin is characterized by homogeneous basement and the density contrast to the sedimentary pack is constant for a same horizontal layer but decreases to deeper layers of second linear law. We discretize the subsurface which contains the basin on a regular grid of juxtaposed prisms, whose density contrasts are the parameters to be estimated. The solution of stabilized inverse problem is obtained by the introduction of a priori information, linking constraints to the gravimetric inversion. However the estimate of the physical property can result in solutions that tend to be harmonic. In order to avoid this tendency, we introduce constraints made to break down the harmonicity on the solutions. Among them, we present two constraints that select surfaces separating sediment and basement, these surfaces selected, iteratively converge to the relief of the basement. We apply this methodology on synthetic data under two conditions: when we have well log information and when we don't. In both results, we obtained competitors solutions and they were very close to the true model. We also applied this methodology to the data set of the Reconcavo Basin and the estimation of the basement relief outlined a consonant interface with previous studies. In addition to this development on the gravimetric inverse problem, we optimized the computational time for calculating the gravity anomaly and the Green's functions matrix. This optimization is favored by the fixed geometry of the interpretive model since we avoid recompute some terms of the calculations necessary to evaluate the elements of the Green's functions matrix. Once this matrix is computed, the calculated gravity anomaly is easily obtained.

Keywords: Sedimentary Basins. Relief Basement. Density Contrast. Gravity Inversion.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – **(a)** Modelo interpretativo – parte superior – perfil de anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada – parte inferior – subsuperfície discretizada em uma malha regular de M prismas justapostos, de dimensões dx e dz ao longo das direções x e z , respectivamente; **(b)** Função linear do contraste de densidade com a profundidade..... 18
- Figura 2 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada; **(b)** Modelo de bacia sedimentar sintético discretizado em 142×13 prismas dispostos numa malha regular nas direções x e z , com dimensões de $0,5 \times 0,5$ km. Os ângulos β e θ são aproximadamente 30° e 45° , respectivamente. O poço que intercepta todas as camadas do modelo localiza-se em $x = 55,5$ km. 30
- Figura 3 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca)..... 32
- Figura 4 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(p)$, superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca) e as superfícies utilizadas na última iteração pelos funcionais $\phi_2^{12}(p)$ (linha magenta tracejada) e $\phi_6^{11}(p)$ (linha verde contínua). 34
- Figura 5 – Superfícies utilizadas pelos funcionais $\phi_2^{12}(p)$ (linha magenta tracejada) e $\phi_6^{11}(p)$ (linha verde contínua) nas iterações 1 (a), 9 (b) e 29 (c) e o relevo verdadeiro em linha preta tracejada 35
- Figura 6 – Funcional do ajuste ϕ^g (linha azul) – gráfico superior – e função objeto $\lambda_2(p)$ (linha vermelha) – gráfico inferior – ao decorrer das 29 iterações. . 36
- Figura 7 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de

densidade via solução $\lambda_3(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).....	38
Figura 8 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).....	40
Figura 9 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda^*(p)$ e região E selecionada para a estimativa da lei de contraste de densidade (retângulo branco).	43
Figura 10 – Nuvem de 163 pontos (pontos pretos) que representam os contrastes de densidade da região E (Figura 9b) estimados por $\lambda^*(p)$. Lei de decaimento do contraste de densidade verdadeiro (linha azul contínua) e a lei de decaimento estimada (linha vermelha tracejada).	44
Figura 11 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via inversão não linear $\lambda_2(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).....	46
Figura 12 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via inversão não linear $\lambda_3(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).....	48
Figura 13 – Localização, limites e arcabouço estrutural da bacia do Recôncavo, mapeado ao nível da seção pré-rift.	49
Figura 14 – Seção geológica esquemática NW-SE, ilustrando a morfologia de meio-gráben da bacia do Recôncavo, cujo depocentro situa-se a leste..	50
Figura 15 – Mapa gravimétrico devido ao relevo do embasamento da Bacia do Recôncavo e a posição do perfil AA' interpretado por Silva et al (2006). Intervalo de contorno de 2 mGal. O poço P localiza-se em $x = 39,7$ km ao longo de AA'.....	51

- Figura 16 – Variação hiperbólica do contraste de densidade (linha azul) e a variação linear do contraste de densidade (linha vermelha) com a profundidade z . A variação de densidade com a profundidade assume um embasamento com densidade de $2,7 \text{ g/cm}^3$52
- Figura 17 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(p)$ e superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha vermelha). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).54
- Figura 18 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(p)$ e a superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha branca). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).56
- Figura 19 – Superfícies utilizadas pelos funcionais $\phi_2^{12}(p)$ (linha magenta tracejada) e $\phi_6^{11}(p)$ (linha verde contínua) nas iterações 1 (a), 9 (b) e 18 (c) e o relevo estimado por Silva et al. (2006) em linha preta tracejada.57
- Figura 20 – Funcional do ajuste ϕ^g (linha azul) – gráfico superior – e função objeto $\lambda_2(p)$ (linha vermelha) – gráfico inferior – ao decorrer das 18 iterações. .58
- Figura 21 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(p)$ e superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha branca). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).60
- Figura A-1 – Sinal gravimétrico no i -ésimo ponto de observação (x_i, z_i) gerado pelo j -ésimo prisma (em vermelho) de dimensões $dx \times dz$. A região dentro do retângulo laranja tracejado contém os prismas que compartilham pelo menos um vértice (pontos azuis) com o prisma vermelho.67

Figura B-1 – Modelo de bacia sedimentar sintética discretizado em 40×13 prismas com dimensões de $1,0 \times 0,5$ km, nas direções x e z, respectivamente. A lei de decaimento do contraste de densidade (equação 1) tem $\Delta\rho_0$ e α iguais a $-0,5 \text{ g/cm}^3$ e $0,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}/\text{km}$, respectivamente. A espessura do pacote sedimentar na j-ésima coluna de prismas (retângulo branco) atinge 4,5 km. 69

Figura B-2 – **(a)** Lei do contraste de densidade com a profundidade da j-ésima coluna da bacia na Figura B-1; **(b)** Eixo superior: perfil obtido pela relação B-1 com a j-ésima coluna de parâmetros verdadeiros; eixo inferior: perfil obtido pela relação B-1 com a j-ésima coluna de parâmetros estimados. Em ambos os gráficos a linha cinza tracejada marca a descontinuidade pacote sedimentar-embasamento. 70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lista de funcionais regularizadores utilizados.	21
Tabela 2 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(p)$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.	31
Tabela 3 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(p)$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.	33
Tabela 4 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(p)$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.	37
Tabela 5 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(p)$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.	39
Tabela 6 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2^*(p)$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.	41
Tabela 7 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(p)$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.	45
Tabela 8 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(p)$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.	47
Tabela 9 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(p)$ – inversão de dados reais.	53
Tabela 10 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(p)$ – inversão de dados reais.	55
Tabela 11 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(p)$ – inversão de dados reais.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	METODOLOGIA	17
2.1	Modelo direto	17
2.2	Problema inverso	19
2.2.1	Funcionais regularizadores	24
2.2.2	Estimação da lei de densidade.....	28
3	APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS	29
3.1	Bacia sedimentar simulada	29
3.2	Inversão com informação de poço	31
3.3	Inversão sem informação de poço	39
4	APLICAÇÃO A DADOS REAIS DA BACIA DO RECÔNCAVO	49
4.1	Informações geológicas e geofísicas	49
4.2	Resultados	52
5	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICES	65
	APÊNDICE A	66
	APÊNDICE B	68
	APÊNDICE C	72

1 INTRODUÇÃO

A interpretação de anomalias gravimétricas em bacias sedimentares é de extrema importância na prospecção de hidrocarbonetos por auxiliar na análise estrutural do embasamento, assim, contribuindo para o entendimento dos sistemas petrolíferos e na identificação de armadilhas estratigráficas e estruturais, feições propícias à acumulação de óleo e gás. Elevações no relevo do embasamento podem formar armadilhas estratigráficas ao proporcionar sedimentação das camadas em forma de cunha em seus flancos, de tal modo que a rocha-reservatório fique aprisionada entre camadas de rochas impermeáveis. Falhas podem propiciar armadilhas estruturais ao justaporem rochas permeáveis e impermeáveis, selando desse modo a rocha-reservatório. Portanto, o delineamento da topografia do embasamento, na busca de feições que indiquem a presença de falhas ou elevações, é de extrema importância para a localização de armadilhas estratigráficas ou estruturais. Como o embasamento da maioria das bacias sedimentares têm algum contraste de densidade com o pacote sedimentar, o relevo do embasamento pode ser estimado através da inversão gravimétrica. Adicionalmente, a estimativa da distribuição da densidade dentro do pacote sedimentar pode auxiliar na interpretação estratigráfica de grande escala.

Os métodos de inversão gravimétrica podem ser classificados em dois grupos fundamentais (SILVA et al., 2001): os que estimam a geometria (MURTHY; RAO, 1979; LEÃO et al., 1996; BARBOSA et al, 1997; BARBOSA et al, 1999b; SILVA et al., 2006; MARTINS et al., 2011) e os que estimam a propriedade física das fontes anômalas (LAST; KUBIK, 1983; GUILLEN; MENICHETTI, 1984; BARBOSA; SILVA, 1994; MEDEIROS; SILVA, 1996; BARBOSA et al, 1999a; BERTETE-AGUIRRE et al., 2002). Para delinear o relevo do embasamento, no primeiro grupo pode-se considerar que a densidade dentro do pacote sedimentar seja constante (e.g. BARBOSA et al, 1997) ou, que haja variação de densidade com a profundidade (e.g. MARTINS et al., 2011). No segundo grupo, a região que contem a bacia sedimentar é discretizada em prismas, e a densidade em cada prisma é constante, no entanto, pode ou não variar de um prisma para outro (e.g. BARBOSA et al, 1999a).

Este trabalho se encontra no segundo grupo e apresentamos uma otimização computacional no problema direto para o cálculo da anomalia gravimétrica e da

matriz sensibilidade. O cálculo dos elementos da matriz sensibilidade envolve termos avaliados a cada vértice dos prismas que compõem o modelo interpretativo. Como, prismas justapostos compartilham o mesmo vértice, então podemos nos valer dessa redundância para não reavaliarmos estes termos. Como a geometria do modelo interpretativo é regular e não muda a cada iteração, uma vez determinada a função geométrica utilizada para o cálculo dos elementos da matriz sensibilidade não é mais necessário recalculá-la iterativamente e assim avaliar a cada iteração a matriz sensibilidade e a anomalia gravimétrica são operações triviais.

Os métodos de inversão empregados neste trabalho estimam a propriedade física e, conseqüentemente, delineiam o relevo do embasamento. Para isso presumimos que o contraste de densidade entre o embasamento homogêneo e os sedimentos em uma camada horizontal é constante podendo, no entanto, decrescer para camadas mais profundas segundo uma lei linear (MURTHY; RAO, 1979). Discretizamos a região que contém a bacia em uma malha de prismas 2D justapostos, com dimensões horizontal e vertical conhecidas, cujos contraste de densidade são os parâmetros a serem estimados. Uma vez que a relação entre a propriedade física (densidade) e as observações gravimétricas é linear, temos uma inversão gravimétrica linear. Todavia, as estimativas obtidas a partir da minimização de vínculos na norma Euclidiana (l_2) produzem soluções que tendem a ser numericamente harmônicas (SILVA et al., 2014). Segundo Silva et al. (2014) há três maneiras de evitar esse tipo de solução: eliminando todos os vínculos, diminuindo a importância dos vínculos na norma l_2 e utilizando outros vínculos que não empreguem essa norma. Neste trabalho seguimos estas duas últimas recomendações.

A metodologia proposta é dividida em três soluções encadeadas, em que a estimativa de uma solução é a aproximação inicial da solução seguinte. A primeira solução é caracterizada pela inversão linear e a estimativa obtida tende a ser harmônica. Os principais vínculos utilizados nessa etapa são o Tikhonov de primeira e segunda ordem minimizados na norma l_2 (TIKHONOV; ARSENIN, 1977). Nos procedimentos de inversão seguintes, evitamos as soluções harmônicas utilizamos vínculos minimizados na norma um (l_1) e diminuimos a importância dos vínculos na norma l_2 . A segunda solução é caracterizada pela inversão não linear, visto que os vínculos minimizados via norma l_1 tornam a inversão não linear, sendo resolvida

iterativamente. Nessa solução, apresentaremos dois vínculos importantes para a quebra da harmonicidade das soluções. Esses vínculos selecionam superfícies que separam o pacote sedimentar do embasamento resultando em soluções descontínuas. A terceira solução é caracterizada pela inversão não linear e pela seleção de sub-regiões no modelo interpretativo.

Aplicamos esta metodologia em dados sintéticos que reproduzem uma bacia sedimentar intracontinental. Utilizamos esses dados em duas situações: quando temos a informação de perfil de poços e quando não temos. Para a situação que não temos essa informação, realizamos uma etapa intermediária de estimação para ajustar a lei de variação do contraste de densidade com a profundidade. Nos resultados obtidos em ambas as situações os relevos estimados, bem como a distribuição de densidade, aproximam-se do verdadeiro.

Aplicamos a metodologia proposta ao conjunto de dados gravimétricos da Bacia do Recôncavo. Utilizamos dados de poço para a informação do contraste de densidade das camadas e da profundidade do embasamento. Aplicamos esta inversão gravimétrica 2D a um perfil que Silva et al. (2006) interpretou. O resultado da metodologia proposta foi concordante com as informações geológicas regionais e com a interpretação de Silva et al. (2006).

2 METODOLOGIA

2.1 Modelo direto

Seja uma bacia sedimentar com embasamento homogêneo e pacote sedimentar heterogêneo. Seleccionamos uma região finita no espaço bidimensional $x - z$ que contém uma seção do pacote sedimentar e parte do embasamento. Discretizamos esta região em uma malha $m_x \times m_z$ de M prismas retangulares justapostos, infinitos ao longo da direção ortogonal y e com dimensões conhecidas dx e dz ao longo das direções x e z (Figura 1a).

Presumimos que o contraste de densidade dentro do pacote sedimentar não varia horizontalmente, mas decresce linearmente com a profundidade (MURTHY; RAO, 1979) pela lei,

$$\Delta\rho(z) = \Delta\rho_0 + \alpha z, \quad (1)$$

sendo, $\Delta\rho_0$ o contraste de densidade superficial expresso em g/cm^3 e α um escalar positivo que define a taxa de variação do contraste de densidade com a profundidade z , expresso em $g \cdot cm^{-3}/km$ (Figura 1b). No modelo interpretativo discretizado, o j -ésimo prisma com o centro localizado em (x_j, z_j) tem contraste de densidade $\Delta\rho_j \equiv \Delta\rho(z_j)$ constante, em relação ao embasamento, e fornecido pela equação 1.

A componente vertical da observação gravimétrica teórica g_i avaliada no i -ésimo ponto de observação (x_i, z_i) , está relacionada com as contribuições dos M prismas pela relação,

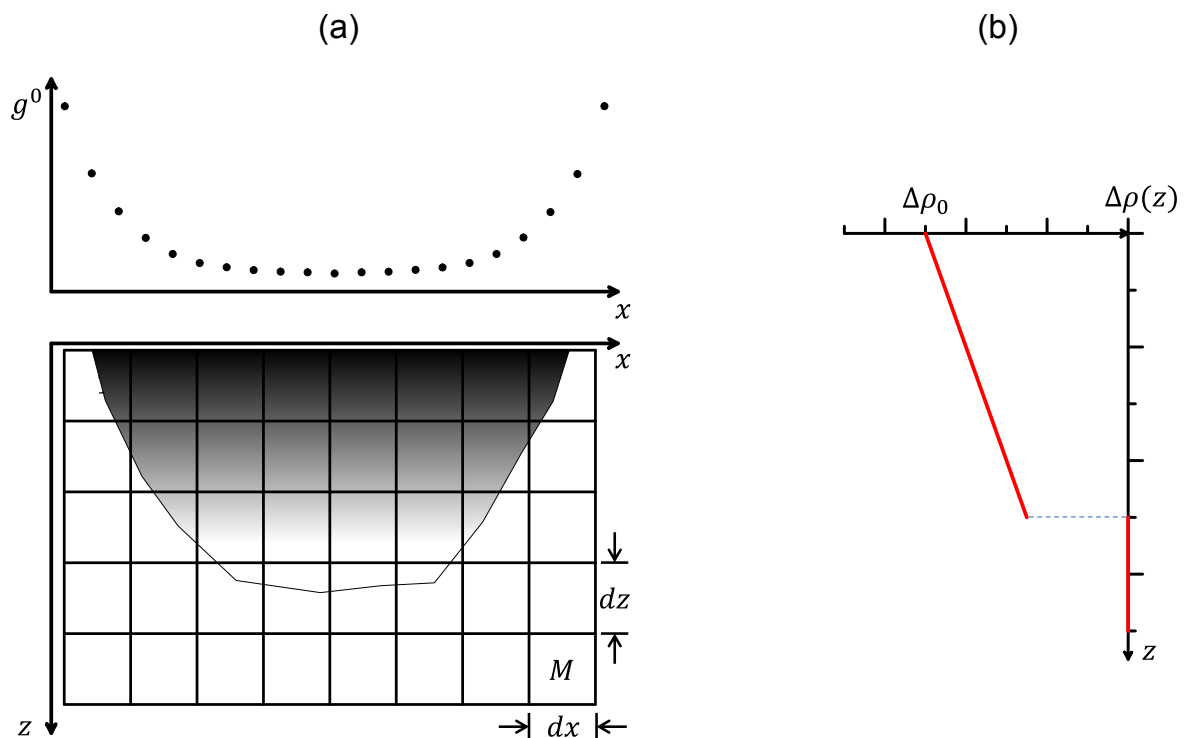
$$g_i(x_i, z_i) = \sum_{j=1}^M \Delta g_i(\Delta\rho_j). \quad (2)$$

A função linear $\Delta g_i(\Delta\rho_j) \equiv \Delta g_i(x_i, z_i)$ é a contribuição gravimétrica calculada no i -ésimo ponto de observação do j -ésimo prisma com centro localizado nas coordenadas (x_j, z_j) e é escrita como:

$$\Delta g_i(x_i, z_i) = 2\gamma \cdot \Delta\rho_j \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(z_i - z'_j)}{(x_i - x'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2} dx'_j dy'_j, \quad (3)$$

sendo γ a constante gravitacional de Newton, x'_j e z'_j as coordenadas do centro de um prisma de superfície infinitesimal dentro do j -ésimo prisma e os limites de integração $x_1 = x_j - dx/2$, $x_2 = x_j + dx/2$, $z_1 = z_j + dz/2$, e $z_2 = z_j + dz/2$. Hubbert (1948) e Zhou (2008) apresentaram uma formulação que reduz a Integral de Superfície da equação 3 para uma Integral de Linha. No Apêndice A apresentamos a solução analítica da equação 3 utilizando Integrais de Linha para prismas com contraste de densidade constante e, um procedimento de otimização computacional para a avaliação de $g_i(x_i, z_i)$ (equação 2).

Figura 1 – **(a)** Modelo interpretativo – parte superior – perfil de anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada – parte inferior – subsuperfície discretizada em uma malha regular de M prismas justapostos, de dimensões dx e dz ao longo das direções x e z , respectivamente; **(b)** Função linear do contraste de densidade com a profundidade.



Fonte: Do autor.

2.2 Problema inverso

A inversão gravimétrica consiste em estimar, a partir de um vetor \mathbf{g}^0 de anomalia gravimétrica observada em N pontos, o vetor \mathbf{p} contendo M contrastes de densidade $\Delta\rho_j$ ($j = 1, \dots, M$). Os parâmetros a serem estimados (\mathbf{p}) estão relacionados aos dados gravimétricos (\mathbf{g}^0) através da relação linear dada pela equação 2. O problema inverso de estimar \mathbf{p} a partir de \mathbf{g}^0 pode ser formulado como um problema de minimização, em relação a \mathbf{p} , do funcional

$$\phi^g = \frac{1}{N} \|\mathbf{g}^c - \mathbf{g}^0\|_2^2, \quad (4)$$

em que $\|\cdot\|_2$ representa a norma Euclidiana (norma l_2) e \mathbf{g}^c é um vetor N -dimensional cujo i -ésimo elemento contém a componente vertical da anomalia predita, computada no i -ésimo ponto de observação (equação 2), usando a distribuição de densidade estimada. O problema inverso linear de obter o vetor $\hat{\mathbf{p}}$ que minimiza o funcional ϕ^g (equação 4) é mal posto por não apresentar solução única. Para obter uma estimativa ($\hat{\mathbf{p}}$) única e estável procuramos uma solução que simultaneamente produza ajuste aceitável à anomalia gravimétrica observada (\mathbf{g}^0) e incorpore as informações exigidas por um conjunto de funcionais regularizadores que introduzem informações a priori sobre os parâmetros a serem estimados. Para tanto, formulamos o problema inverso de estimar os M contrastes de densidade através da minimização de dois conjuntos de funcionais regularizadores, os que são minimizados via norma l_2 , $\phi^{l_2}(\mathbf{p})$, e os que são minimizados via norma l_1 , $\phi^{l_1}(\mathbf{p})$.

Assim definimos o problema inverso vinculado pela minimização dos conjuntos de funcionais:

$$\phi^{l_2}(\mathbf{p}), \text{ e } \phi^{l_1}(\mathbf{p}), \quad (5)$$

sujeito a:

$$\phi^g = \delta^2 \text{ e } 0 > \mathbf{p} > \Delta\rho_0, \quad (6)$$

sendo δ^2 o valor esperado para a média da soma dos quadrados da realização do ruído nos dados gravimétricos observados, e $\Delta\rho_0$ o limite inferior do vínculo de desigualdade incorporado a $\hat{\mathbf{p}}$ via transformação homeomórfica (BARBOSA et al., 1999a). Como o contraste de densidade entre o sedimento e o embasamento é

negativo, exigimos que todos os elementos de \mathbf{p} sejam menores que zero, e maiores que o contraste de densidade superficial ($\Delta\rho_0$).

Todos os funcionais regularizadores que utilizamos podem ser formulados, em cada norma l , simplesmente por:

$$\phi_{\eta}^l(\mathbf{p}) = \|\mathbf{Q}_{\eta}\mathbf{p} - \mathbf{q}_{\eta}\|_l, \quad (7)$$

sendo η um índice que identifica o regularizador, \mathbf{Q}_{η} e \mathbf{q}_{η} uma matriz e um vetor, respectivamente, definidos em cada η regularizador, e $\|\cdot\|_l$ denota a norma l adotada para a minimização de $\phi_{\eta}^l(\mathbf{p})$.

A seleção da norma l que minimiza cada funcional regularizador $\phi_{\eta}(\mathbf{p})$ ($\eta = 1, \dots, 6$) pode favorecer soluções que sejam globalmente suaves, norma l_2 , ou que contenham variações abruptas nos valores estimados, norma l_1 (MARTINS, 2009). Neste trabalho, consideramos que os funcionais regularizadores de igualdade absoluta devem ser minimizados na norma l_2 . Para os demais regularizadores sempre que houver a presunção de variação abrupta dos valores estimados a minimização será via norma l_1 . Por exemplo, na interface sedimento-embasamento espera-se variação abrupta tanto do contraste de densidade, quanto da taxa de variação vertical deste contraste.

Utilizamos seis tipos diferentes de regularizadores, minimizados na norma l_1 ou na norma l_2 , η variando de 1 a 6. Estes seis regularizadores estão listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Lista de funcionais regularizadores utilizados.

Funcional $\phi_{\eta}^l(\mathbf{p})$	Nome do Funcional
$\phi_1(\mathbf{p}) = \ \mathbf{Q}_1\mathbf{p} - \mathbf{q}_1\ _l$	Igualdade absoluta
$\phi_2(\mathbf{p}) = \ \mathbf{p} - \mathbf{p}^*\ _l$	Igualdade absoluta ao modelo informado construído com critério de meia-densidade
$\phi_3(\mathbf{p}) = \ \mathbf{p}\ _l$	Ridge Regression
$\phi_4(\mathbf{p}) = \ \mathbf{R}_h\mathbf{p}\ _l$	Tikhonov de Primeira Ordem
$\phi_5(\mathbf{p}) = \ \mathbf{R}_v^T\mathbf{R}_v\mathbf{p}\ _l$	Tikhonov de Segunda Ordem
$\phi_6(\mathbf{p}) = \ \mathbf{R}_v\mathbf{p} - \mathbf{c}\ _l$	Tikhonov de Segunda Ordem com minimização para taxa de variação constante de distribuição informada

Fonte: Do autor

Mais detalhes a respeito destes seis regularizadores estão apresentados mais a diante na seção 2.2.1.

O vetor $\hat{\mathbf{p}}$ contendo as M estimativas dos contrastes de densidade, que soluciona o problema de otimização vinculado dado pela minimização de alguns, ou todos os funcionais descritos $\phi_{\eta}(\mathbf{p})$ ($\eta = 1, \dots, 6$), sujeito a explicar os dados geofísicos (equação 4), é obtido minimizando-se um funcional não vinculado:

$$\lambda_S(\mathbf{p}) = \phi_g + \sum_{\eta=1}^6 \mu_{\eta} \phi_{\eta}^l(\mathbf{p}) \quad (8)$$

sendo μ_{η} o η -ésimo parâmetros de regularização (escalares positivos) associado ao η -ésimo regularizador.

Construímos três diferentes soluções minimizando três diferentes funções-objeto $\lambda_S(\mathbf{p})$ que combinam alguns ou todos os seis funcionais regularizadores. Nestas soluções, a depender da norma selecionada (l_1 ou l_2) aplicada aos regularizadores, a inversão pode ser linear ou não linear. Particularmente, construímos estas três soluções utilizando as funções-objeto $\lambda_S(\mathbf{p})$:

$$\lambda_1(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_1\phi_1^{l2}(\mathbf{p}) + \mu_3\phi_3^{l2}(\mathbf{p}) + \mu_4\phi_4^{l2}(\mathbf{p}) + \mu_5\phi_5^{l2}(\mathbf{p}), \quad (9)$$

$$\lambda_2(\mathbf{p}) = \phi_g + \sum_{\eta=1}^2 \mu_\eta\phi_\eta^{l2}(\mathbf{p}) + \sum_{\eta=3}^6 \mu_\eta\phi_\eta^{l1}(\mathbf{p}), \quad (10)$$

$$\lambda_3(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_1\phi_1^{l2}(\mathbf{p}) + \mu_3\phi_3^{l2}(\mathbf{p}_I) + \mu_4\phi_4^{l2}(\mathbf{p}_{II}) + \mu_5\phi_5^{l1}(\mathbf{p}_{III}), \quad (11)$$

em que a 1ª solução é definida pela minimização da função-objeto $\lambda_1(\mathbf{p})$ e resulta em inversão linear. A 2ª e a 3ª solução são obtidas por procedimento de inversão não linear e definidas pelas minimizações das funções-objeto $\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$, respectivamente. A aproximação inicial de $\lambda_2(\mathbf{p})$ é dada pelo resulta obtido em $\lambda_1(\mathbf{p})$, e a aproximação inicial de $\lambda_3(\mathbf{p})$ e dada pelo resultado obtido em $\lambda_2(\mathbf{p})$.

Na 3ª solução ($\lambda_3(\mathbf{p})$) selecionamos os três funcionais regularizadores $\phi_3^{l2}(\mathbf{p}_I)$, $\phi_4^{l2}(\mathbf{p}_{II})$ e $\phi_5^{l1}(\mathbf{p}_{III})$ para atuarem em três diferentes regiões no espaço $x - z$, regiões *I*, *II* e *III*. Para a definição destas três regiões precisamos primeiro definir uma interface separando o embasamento do sedimento. Esta interface é delineada pela aplicação do critério da meia-densidade ao vetor estimado $\hat{\mathbf{p}}$ da aproximação inicial. Este critério é baseado na comparação do contraste de densidade estimado com o contraste de densidade informado, ambos de uma mesma camada horizontal. Este critério funciona da seguinte forma:

- Comparamos em uma mesma coluna de prismas a densidade estimada e a informada, se o contraste de densidade estimado p_j for maior que a metade do contraste de densidade informado para a mesma camada horizontal, o topo do prisma que contém p_j localiza a provável interface sedimento-embasamento naquela coluna. Repetimos este processo em todas as colunas de prismas e assim posicionamos a interface que separa o sedimento e o embasamento.

Localizada esta interface, pelo critério de meia densidade selecionamos as três regiões, da seguinte maneira:

- A Região I que compreende o pacote sedimentar presumido e é selecionada limitada no topo pela superfície da terra e na base pelos prismas superiores da Região II, de modo que há uma sobreposição de um prisma de espessura entre estas duas regiões;

– A Região II é definida por uma camada de espessura maior ou igual a três prismas de forma que os topos dos prismas centrais desta camada coincidem com a superfície delineada pelo critério de meia densidade;

– A Região III que compreende o embasamento presumido é selecionada limitada na base pelo limite discretizado no modelo interpretativo e no topo pelos prismas inferiores da Região II, de modo que também há sobreposição de um prisma de espessura entre estas duas regiões.

Selecionamos o funcional regularizador $\phi_3^{l2}(\mathbf{p}_{III})$ (Ridge Regression) para atuar na Região III por presumirmos que nesta região o contraste de densidade é zero. Selecionamos o funcional regularizador $\phi_4^{l2}(\mathbf{p}_I)$ (Suavidade Global) para atuar na Região I por presumirmos que dentro do pacote sedimentar não há variação horizontal de densidade. Por fim, selecionamos o funcional regularizador $\phi_5^{l1}(\mathbf{p}_{II})$ para atuar na Região II por presumirmos que nesta região é que se localiza a descontinuidade vertical da taxa de variação do contraste de densidade.

O problema de minimizar os funcionais não vinculados $\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$ se torna não linear por conta das derivadas, em relação aos parâmetros, dos funcionais regularizadores minimizados na norma l_1 ($\phi_\eta^{l1}(\mathbf{p})$) serem funções dos parâmetros. Para resolver iterativamente este problema não linear, empregamos o método de Gauss-Newton com a estratégia de Marquardt (MARQUARDT, 1963). Neste procedimento, primeiro expande-se a função-objeto ($\lambda_2(\mathbf{p})$ ou $\lambda_3(\mathbf{p})$) em série de Taylor em torno da solução estimada $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ obtida na k -ésima iteração, mantendo-se apenas os termos de segunda ordem. Em seguida, deriva-se a função $\lambda(\hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta\mathbf{p}_{(k)})$ em relação a $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$ e iguala-se ao vetor nulo. Assim, a equação normal para a estimativa $\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ é dada por:

$$\mathbf{H}_k \Delta\hat{\mathbf{p}}_k = -\mathbf{J}_k \quad (12)$$

em que o vetor Jacobiano \mathbf{J} e a matriz Hessiana \mathbf{H} do funcional $\lambda_s(\mathbf{p})$ (equação 8) são apresentados no Apêndice C.

Embora a minimização do funcional do ajuste ϕ^g (equação 4) seja linear para a estimativa do contraste de densidade, nas funções-objeto não lineares $\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$ este funcional é reavaliado em cada k -ésima iteração, sendo ϕ^g dado por:

$$\phi^g|_k = \frac{1}{N} \|\mathbf{A}\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{g}^0\|_2^2, \quad (13)$$

em que \mathbf{A} é a matriz sensibilidade de dimensão $M \times M$.

Nas soluções com inversão não linear, $\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$, o algoritmo de inversão é finalizado quando não há mais significativa variação destas funções-objetos. Na prática a convergência ocorre quando, em uma k -ésima iteração, a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left| \frac{\lambda_s(\hat{\mathbf{p}}_k) - \lambda_s(\hat{\mathbf{p}}_{k-1})}{\lambda_s(\hat{\mathbf{p}}_{k-1})} \right| \leq \varepsilon, s = 2 \text{ ou } 3 \quad (14)$$

sendo ε um pequeno escalar definido para cada inversão não linear $\lambda_s(\mathbf{p})$.

2.2.1 Funcionais regularizadores

Apresentamos a seguir os seis funcionais regularizadores listados na Tabela 1. Todos podem ser escritos na forma apresentada na equação 7.

Nos três primeiros regularizadores (η variando de 1 a 3) introduzimos três vínculos de igualdade absoluta. Nestes funcionais a matriz \mathbf{Q}_η tem dimensão $L_\eta \times M$ e o vetor \mathbf{q}_η dimensão L_η , sendo L_η o número de valores conhecidos a priori de contraste de densidade utilizados neste vínculo de igualdade absoluta. Nestes casos a matriz \mathbf{Q}_η contém todos os elementos nulos exceto um único elemento não nulo por linha, na j -ésima coluna, igual a um. Este elemento não nulo, na k -ésima linha da matriz \mathbf{Q}_η ($k = 1, \dots, L_\eta$) associa o j -ésimo elemento do vetor \mathbf{p} com o k -ésimo elemento do vetor \mathbf{q}_η , que contém o k -ésimo valor de contraste de densidade conhecido a priori. Portanto estes regularizadores exigem que a diferença entre o j -ésimo elemento do vetor \mathbf{p} e o k -ésimo elemento do vetor \mathbf{q}_η seja mínima. Em outras palavras, exigem que seja mínima a diferença entre os contrastes de densidade estimado e informado a priori para alguns, ou todos, elementos do vetor de parâmetros.

No funcional de igualdade absoluta $\phi_1(\mathbf{p})$, L_1 é menor que M , ou seja, o número de informações a respeito do valor do contraste de densidade é menor que o número de parâmetros. Neste funcional de igualdade absoluta $\phi_1(\mathbf{p}) =$

$\|Q_1\mathbf{p} - \mathbf{q}_1\|_l$ é exigido que seja mínima a diferença entre os contrastes de densidade informados e estimados em três localizações distintas:

- i) na primeira camada horizontal, para que estes valores de contraste de densidade estimados sejam próximos do valor conhecido a priori do contraste de densidade superficial ($\Delta\rho_0$) da bacia;
- ii) nas demais bordas do bloco que limitam o modelo interpretativo (primeira e última colunas de prismas e na camada mais profunda de prismas) para que estes valores de contrastes de densidade estimados sejam próximos de zero, uma vez que estas faces são constituídas por embasamento;
- iii) nas colunas interceptadas por furos de sondagens, para que estes valores de contraste de densidade estimados sejam próximos dos valores de contraste de densidade informados pelos poços.

No funcional de igualdade absoluta $\phi_2(\mathbf{p})$ é exigido que todos os parâmetros estimados ($L_2 = M$) tenham valores próximos ao da distribuição de densidade de um modelo predito \mathbf{p}^* . Os elementos do modelo predito recebem valores, informados a priori, da lei de decaimento do contraste de densidade fornecida por poço, ou pela estimativa dessa lei. O vetor do modelo predito \mathbf{p}^* é construído, iterativamente, a partir da aplicação do critério de meia densidade aplicado a estimativa da iteração anterior, comparando-se o contraste de densidade estimado com o contraste de densidade informado de uma mesma camada horizontal. A cada iteração, para cada coluna de prismas, este critério é aplicado da seguinte forma:

– Se o contraste de densidade estimado p_j for menor ou igual a metade do contraste de densidade informado para aquela camada horizontal, o elemento p_j^* recebe o contraste de densidade informado a priori;

– Se o contraste de densidade estimado p_j for maior que a metade do contraste de densidade informado para aquela camada horizontal, o elemento p_j^* recebe o valor zero.

Este procedimento é repetido em todas as colunas de prismas de modo que o vetor do modelo predito \mathbf{p}^* tem mesma dimensão do vetor de parâmetros \mathbf{p} .

Neste funcional de igualdade absoluta $\phi_2(\mathbf{p})$ a matriz \mathbf{Q}_2 é igual a matriz identidade ($\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$) de dimensão $M \times M$ e o vetor \mathbf{q}_2 tem dimensão M e é igual ao vetor do modelo predito \mathbf{p}^* , assim, $\phi_2(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\|_l$. Pela minimização do funcional de igualdade absoluta $\phi_2(\mathbf{p})$ é introduzida a informação que os valores do contraste de densidade estimado \mathbf{p} são ou próximo do valor da densidade informada para o pacote sedimentar ou próximo de zero, a depender da construção de \mathbf{p}^* .

No funcional de igualdade absoluta $\phi_3(\mathbf{p})$ a matriz \mathbf{Q}_3 é igual a matriz identidade ($\mathbf{Q}_3 = \mathbf{I}$) de dimensão $M \times M$ ($L_3 = M$) e o vetor \mathbf{q}_3 é igual ao vetor nulo também de dimensão também M , e assim $\phi_3(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|_l$. Este é o regularizador Ridge Regression ou Tikhonov de ordem zero (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) avaliado na norma l . Por meio da minimização do funcional $\phi_3(\mathbf{p})$, implicitamente é introduzida a informação geológica a priori de que a distribuição do contraste de densidade dentro do pacote sedimentar deve ser a mínima. Comumente em muitas aplicações geofísicas este regularizador é introduzido apenas para conferir estabilidade à solução, uma vez que a imposição de valores nulos para todos os parâmetros não guarda nexos geológico.

Utilizamos outros três funcionais regularizadores com η variando de 4 a 6. No funcional regularizador $\phi_4(\mathbf{p})$ a matriz \mathbf{Q}_4 é igual a \mathbf{R}_h , de dimensão $L_4 \times M$, representando o operador diferencial discreto de primeira ordem na direção horizontal e o vetor \mathbf{q}_4 é igual ao vetor nulo também de dimensão L_4 , e assim $\phi_4(\mathbf{p}) = \|\mathbf{R}_h \mathbf{p}\|_l$, sendo L_4 o número de pares de prismas horizontalmente adjacentes. Cada linha da matriz \mathbf{R}_h contém somente dois elementos não nulos e iguais a 1 e -1, que estão associados a cada par de parâmetros horizontalmente adjacentes. O funcional $\phi_4(\mathbf{p})$ é o regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) avaliado na norma l . Este regularizador exige que as diferenças entre os valores de contraste de densidade entre prismas horizontalmente adjacentes sejam mínimas. Por meio da minimização do funcional $\phi_4(\mathbf{p})$, implicitamente é introduzida a informação geológica a priori de que a distribuição do contraste de densidade é homogênea em uma mesma camada horizontal.

No funcional regularizador $\phi_5(\mathbf{p})$ a matriz \mathbf{Q}_5 é igual a $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v$, de dimensão $M \times M$, representando o operador diferencial discreto de segunda ordem na direção vertical e o vetor \mathbf{q}_5 é igual ao vetor nulo de dimensão também M , e assim $\phi_5(\mathbf{p}) = \|\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v \mathbf{p}\|_l$. A matriz $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v$ tem todos os elementos nulos, exceto os que recebem valores -1 e 2, que estão associados a cada tripla de parâmetros verticalmente adjacentes (LUIZ, 1999). O funcional $\phi_5(\mathbf{p})$ é o regularizador de Tikhonov de segunda ordem (TIKHONOV e ARSENIN, 1977) minimizado via norma l . Este regularizador exige que as diferenças entre parâmetros verticalmente adjacente sejam constantes, ou seja, exige que a variação destes parâmetros seja linear com a profundidade. Assim, através da minimização deste funcional, é introduzida a informação a priori de que a variação vertical do contraste de densidade é constante.

No funcional regularizador $\phi_6(\mathbf{p})$ a matriz \mathbf{Q}_6 é igual a \mathbf{R}_v , de dimensão $L_6 \times M$, representando o operador diferencial discreto de primeira ordem na direção vertical e o vetor \mathbf{q}_6 é igual ao vetor \mathbf{c} de dimensão também L_6 , e assim $\phi_6(\mathbf{p}) = \|\mathbf{R}_v \mathbf{p} - \mathbf{c}\|_l$, sendo L_6 o número de pares de prismas verticalmente adjacentes. Cada linha da matriz \mathbf{R}_v contém somente dois elementos não nulos, 1 e -1, localizados nas colunas referentes aos parâmetros verticalmente adjacentes. O vetor \mathbf{c} é construído a cada iteração e seleciona a interface separando o pacote sedimentar do embasamento e recebe valores da variação do contraste de densidade constante e diferente de zero dentro do pacote sedimentar e zero dentro do embasamento. A construção do vetor \mathbf{c} é detalhada no Apêndice B. A minimização do funcional $\phi_6(\mathbf{p})$ exige que a diferença entre a variação vertical dos parâmetros estimados ($\mathbf{R}_v \mathbf{p}$) e a variação informada para esses parâmetros (\mathbf{c}) seja mínima.

O funcional $\phi_6(\mathbf{p})$ implicitamente incorpora as mesmas informações que o funcional $\phi_5(\mathbf{p})$, assim utilizar ou não o funcional $\phi_5(\mathbf{p})$ na 2ª solução permite indistintamente se chegar a mesma estimativa. No entanto, ao utilizarmos o funcional $\phi_6(\mathbf{p})$ a convergência é acelerada, e é diminuído o número de iterações necessárias para satisfazer o critério estabelecido na inequação 14.

2.2.2 Estimação da lei de densidade

Os funcionais regularizadores $\phi_2(\mathbf{p})$ e $\phi_6(\mathbf{p})$ necessitam de informação a priori a respeito da distribuição de densidade. Caso esta informação esteja disponível por um furo de sondagem ela também pode ser incorporada no funcional regularizador $\phi_1(\mathbf{p})$ na coluna de prismas correspondente a localização do poço. Mas se esta informação a respeito da lei de decaimento do contraste de densidade não estiver disponível a priori ela pode ser obtida a partir da própria estimativa da distribuição de densidade. Para propósito construímos uma solução intermediária:

$$\lambda^*(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_1 \phi_1^{l2}(\mathbf{p}) + \sum_{\eta=3}^5 \mu_\eta \phi_\eta^{l1}(\mathbf{p}). \quad (15)$$

Note que $\lambda^*(\mathbf{p})$ difere de $\lambda_2(\mathbf{p})$ por não utilizar os funcionais ϕ_2^{l2} e ϕ_6^{l1} .

A estimativa da distribuição de densidade obtida com a 1ª solução ($\lambda_1(\mathbf{p})$) é utilizada como aproximação inicial nesta solução intermediária.

Aplicamos esta solução intermediária $\lambda^*(\mathbf{p})$ e selecionamos uma região no espaço $x - z$ dos parâmetros estimados, que preferivelmente contenha a porção mais profunda da bacia. Dentro desta região selecionamos para cada coluna de prismas alguns valores de contraste de densidade estimado. Utilizamos o critério do valor máximo do perfil $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v |_{x_j} \mathbf{p}$ (Apêndice B) selecionando apenas os parâmetros estimados posicionados em cada coluna a cima da posição do ponto máximo dessa curva. A partir desta distribuição de parâmetros estimados selecionados, ajustamos uma reta que passa a representar a lei de decaimento do contraste de densidade para toda a bacia sedimentar. Empregamos nas soluções subsequentes $\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$. Na solução $\lambda_2(\mathbf{p})$ esta lei estimada é empregada na construção dos funcionais $\phi_2(\mathbf{p})$ e $\phi_6(\mathbf{p})$ e na construção de um poço virtual no funcional $\phi_1(\mathbf{p})$. Na solução $\lambda_3(\mathbf{p})$ esta lei estimada é empregada como informação para o delineamento da interface sedimento-embasamento do centro da região II.

3 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos aplicando em dados gravimétricos sintéticos as três soluções apresentadas ($\lambda_s(p)$, $s = 1, 2$ e 3).

A metodologia apresentada pressupõe que o contraste de densidade em uma mesma camada horizontal de sedimentos é constante, podendo haver descontinuidade no contato com o embasamento. Pressupõe também que o contraste de densidade dos sedimentos decaia linearmente com a profundidade, podendo ocorrer descontinuidade no contato com embasamento. Deste modo, esta metodologia é aplicável à interpretação da distribuição do contraste de densidade dentro do pacote sedimentar e do relevo da interface sedimento-embasamento pela localização desta descontinuidade.

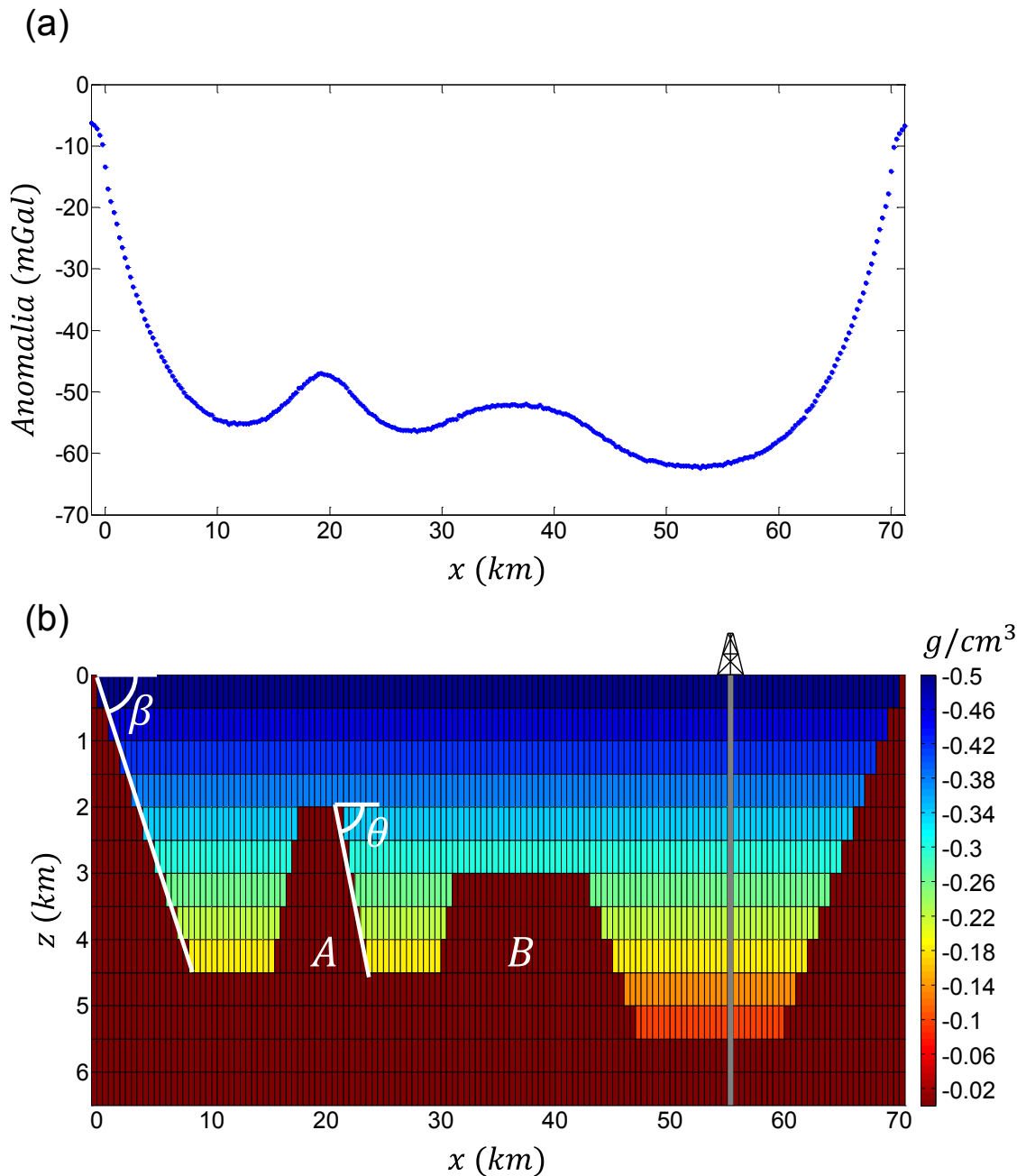
Portanto, para a estimação da distribuição da propriedade física em subsuperfície utilizamos um perfil de dados gravimétricos produzido por uma bacia sedimentar simulada com contraste de densidade descrito pela equação 1. Construímos dois conjuntos de resultados que se distinguem pela utilização, ou não, de informação a priori fornecida por dados de poços.

3.1 Bacia sedimentar simulada

A Figura 2a mostra 291 observações sintéticas de anomalia gravimétrica com espaçamento uniforme de $0,25 \text{ km}$ em um perfil ao longo do eixo x dentro do intervalo de $-1,25 \text{ km}$ a $71,25 \text{ km}$, contaminadas com ruído pseudo-aleatório Gaussiano de média nula e desvio padrão de $0,1 \text{ mGal}$. Esta anomalia é produzida por uma bacia sedimentar 2D composta por 142×13 prismas dispostos numa malha regular nas direções x e z , com dimensões $0,5 \times 0,5 \text{ km}$ (Figura 2b). No pacote sedimentar o contraste de densidade decai linearmente (equação 1) com $\Delta\rho_0$ e α iguais a $-0,5 \text{ g/cm}^3$ e $0,08 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}/\text{km}$, respectivamente. Este modelo simula um arcabouço caracterizado por altos e baixos estruturais (A e B na Figura 2b), em que predominam feições suaves com ângulos de mergulho que se aproximam de 30° , exceto na feição A , localizada no intervalo de 15 km a 24 km , que apresenta bordas com ângulos de mergulho de 45° . Localizamos um poço que alcança a região mais

profunda da bacia sintética ($x = 55,5 \text{ km}$) e dele é obtida a informação a priori do contraste de densidade de todas as camadas do modelo simulado.

Figura 2 – (a) Anomalia gravimétrica observada; (b) Modelo de bacia sedimentar sintético discretizado em 142×13 prismas dispostos numa malha regular nas direções x e z , com dimensões de $0,5 \times 0,5 \text{ km}$. Os ângulos β e θ são aproximadamente 30° e 45° , respectivamente. O poço que intercepta todas as camadas do modelo localiza-se em $x = 55,5 \text{ km}$.



3.2 Inversão com informação de poço

Nos procedimentos de inversão a seguir, discretizamos a região que contém a bacia sedimentar em 142×13 prismas nas direções x e z , com dimensões de $0,5 \times 0,5 \text{ km}$. Utilizamos a informação a priori de dados de poço, do contraste de densidade superficial verdadeiro ($\Delta\rho_0 = -0,5 \text{ g/cm}^3$) e da localização das bordas laterais do modelo verdadeiro simulado.

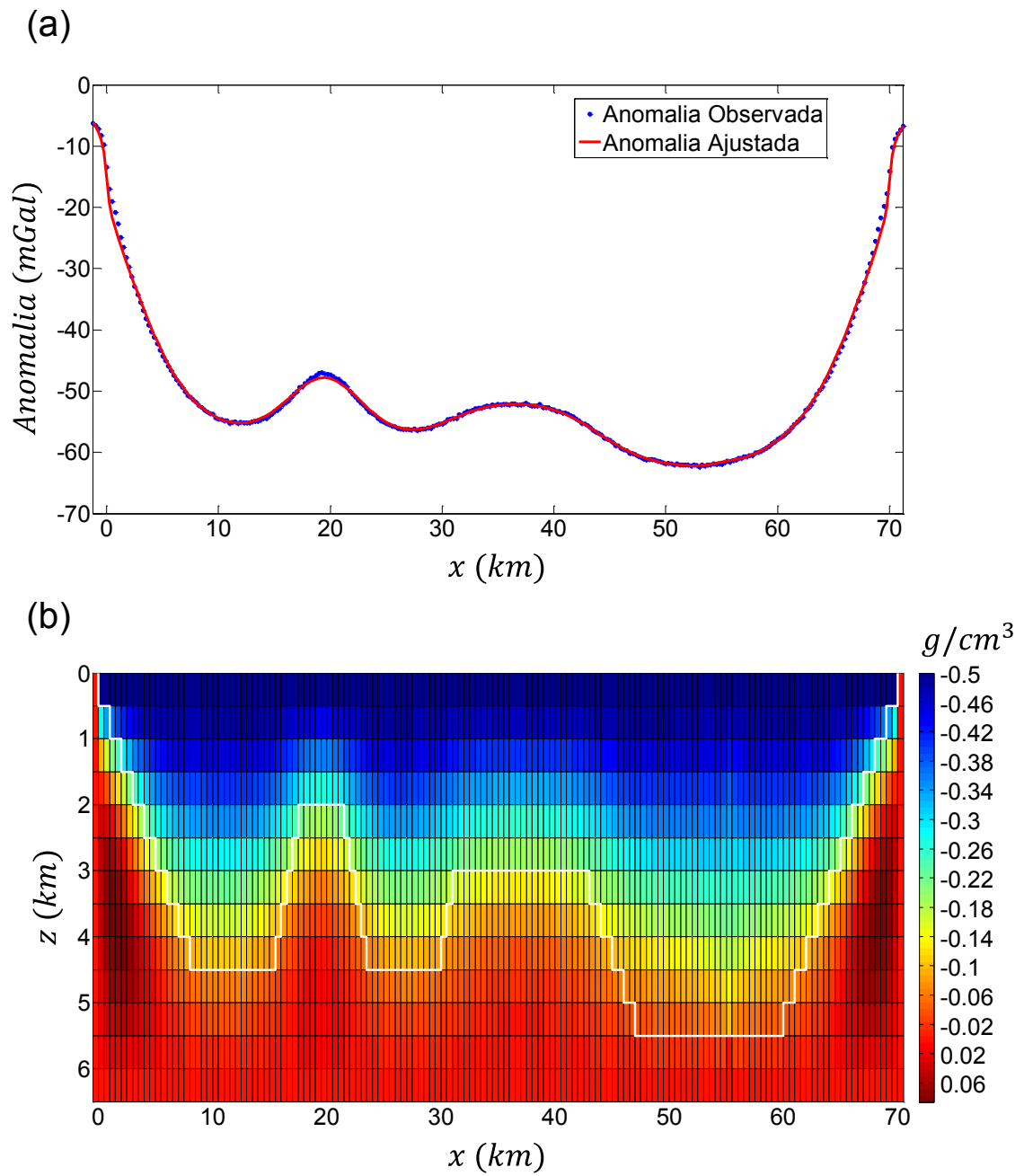
A Figura 3b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$ aplicada à anomalia gravimétrica observada (Figura 2a). Essa estimativa apresenta uma distribuição do contraste de densidade que não delinea claramente o pacote sedimentar, além de apresentar valores positivos da propriedade física. A Figura 3a mostra, em linha vermelha contínua, a anomalia gravimétrica ajustada. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_1(\mathbf{p})$ estão na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(\mathbf{p})$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-6}
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}
$\phi_5^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}

Fonte: Do autor.

Figura 3 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).



Fonte: Do autor.

A Figura 4b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(\mathbf{p})$. Este resultado mostra um relevo do embasamento estimado semelhante ao relevo verdadeiro simulado (linha branca na Figura 4b). Embora as bordas suaves estejam delineadas, os topos dos altos estruturais A e B não estão corretamente localizados e a região mais profunda da bacia não está corretamente delineada.. A Figura 5 mostra as superfícies utilizadas ao decorrer das iterações para a construção dos funcionais $\phi_2(\mathbf{p})$ e $\phi_6(\mathbf{p})$.

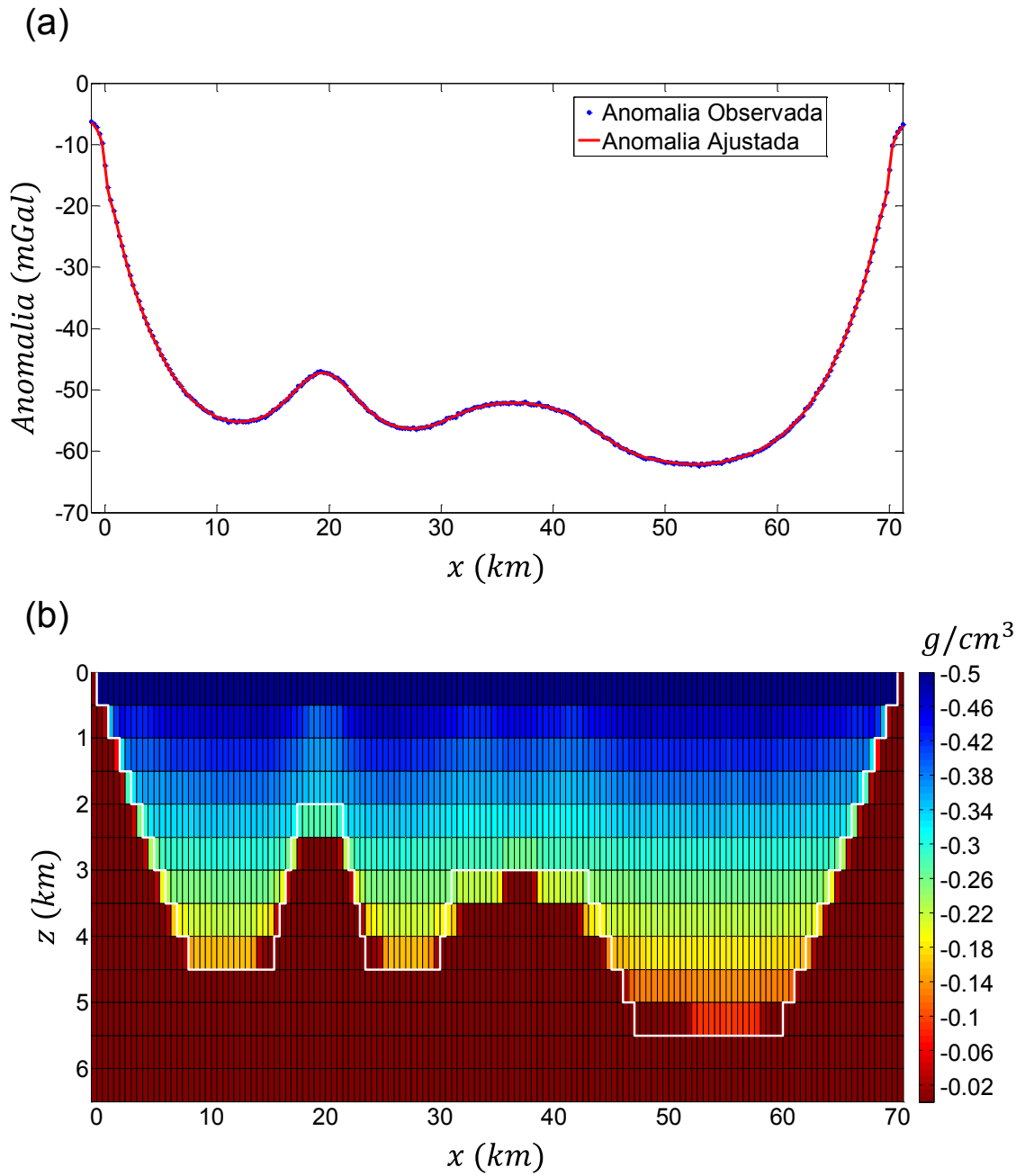
A Figura 4a mostra as anomalias observada e ajustada. Note que a anomalia ajustada se aproxima muito da observada (Figura 4a). A Figura 6 mostra o comportamento assintótico do funcional do ajuste (ϕ^g) e da função objeto $\lambda_2(\mathbf{p})$ nas últimas iterações. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_2(\mathbf{p})$ estão na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(\mathbf{p})$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_2^{l2}(\mathbf{p})$	5×10^{-5}
$\phi_3^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-4}
$\phi_4^{l1}(\mathbf{p})$	5×10^{-4}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-4}
$\phi_6^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}

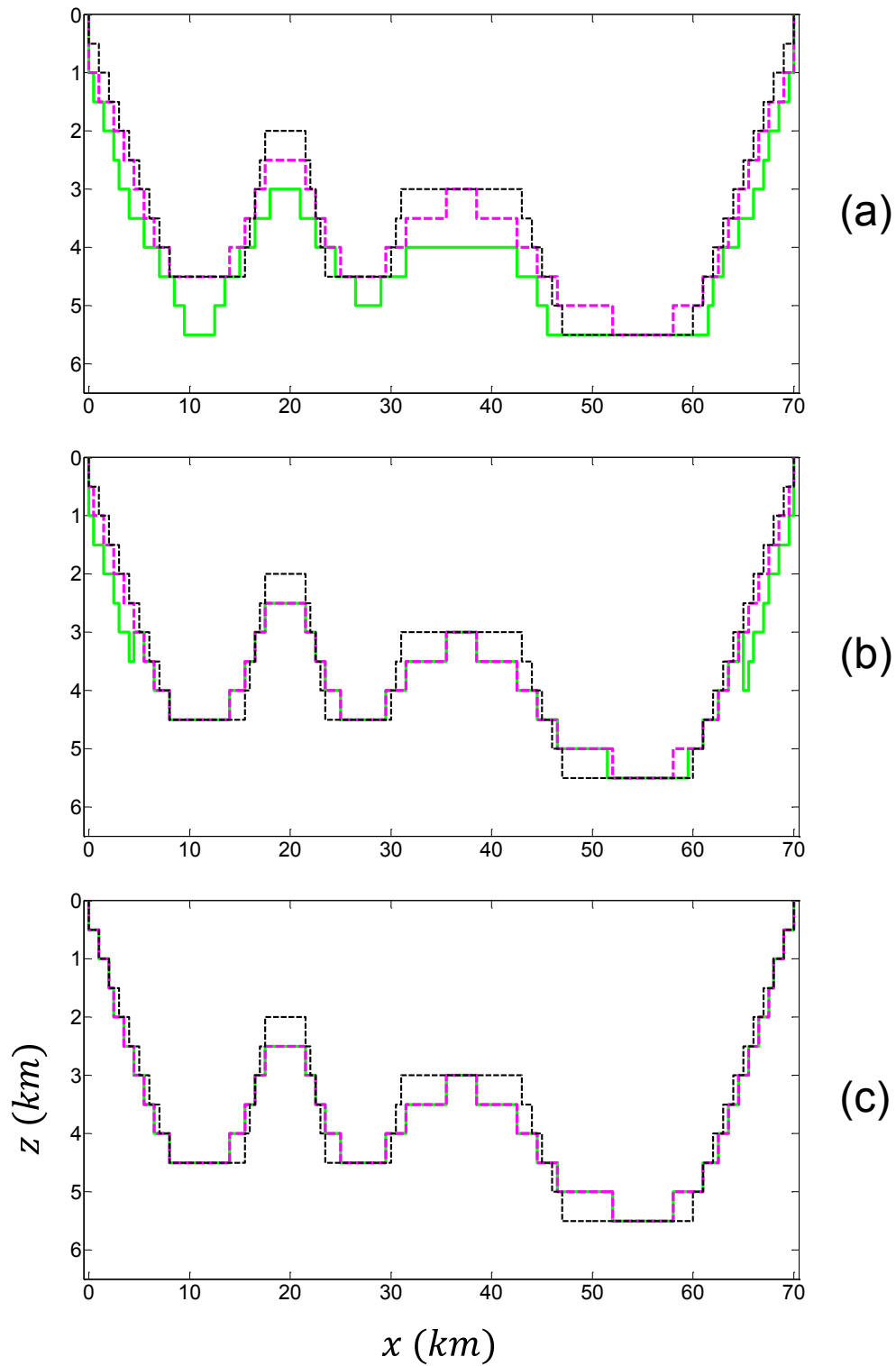
Fonte: Do autor.

Figura 4 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).



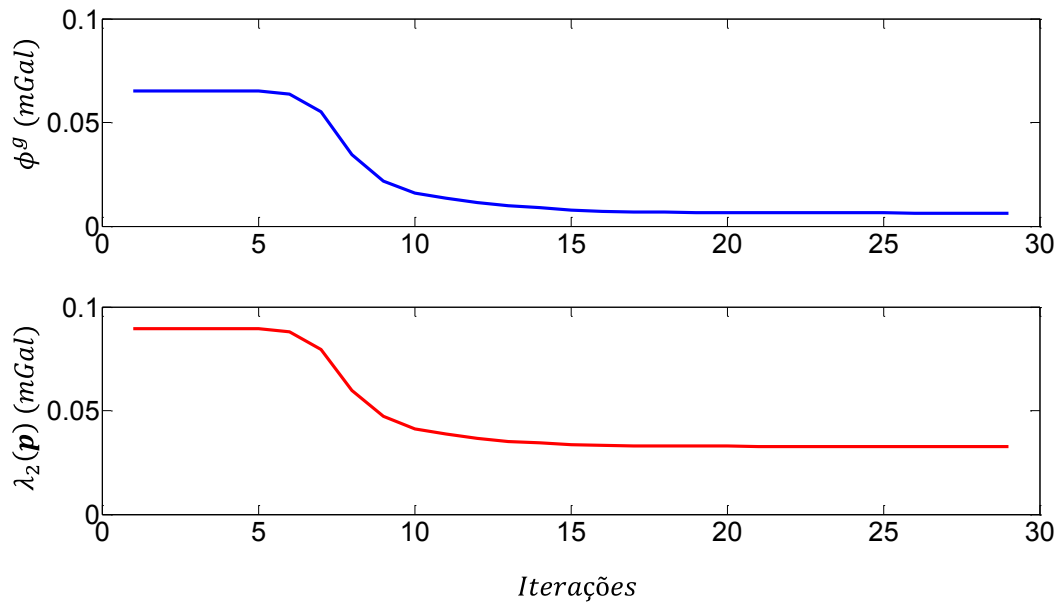
Fonte: Do autor.

Figura 5 – Superfícies utilizadas pelos funcionais $\phi_2^{l2}(\mathbf{p})$ (linha magenta tracejada) e $\phi_6^{l1}(\mathbf{p})$ (linha verde contínua) nas iterações 1 (a), 9 (b) e 29 (c) e o relevo verdadeiro em linha preta tracejada.



Fonte: Do autor.

Figura 6 – Funcional do ajuste ϕ^g (linha azul) – gráfico superior – e função objeto $\lambda_2(\mathbf{p})$ (linha vermelha) – gráfico inferior – ao decorrer das 29 iterações.



Fonte: Do autor.

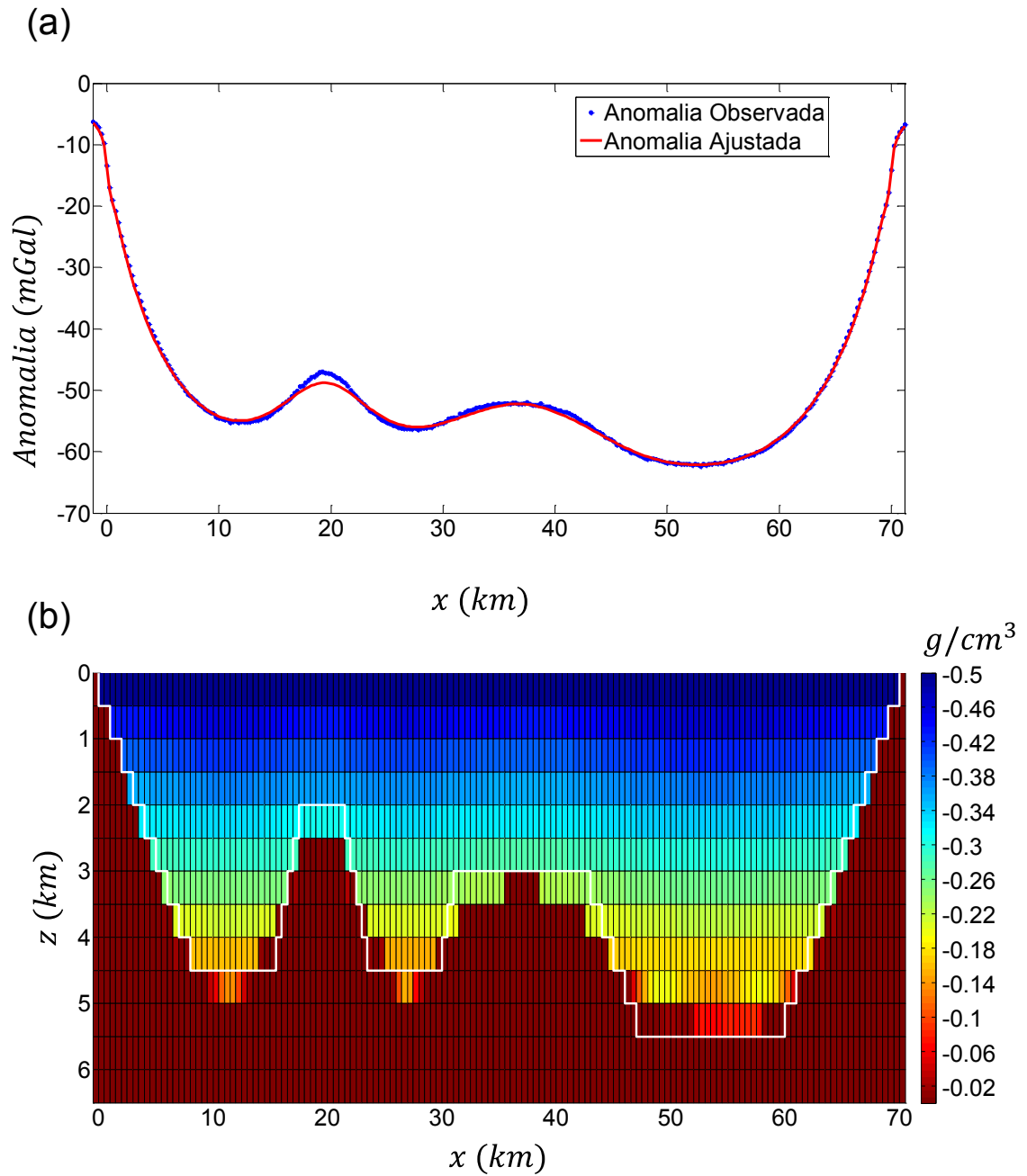
A Figura 7b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(\mathbf{p})$. Note que houve um melhor delineamento do relevo do embasamento, principalmente nos flancos, tornando mais nítido o contato pacote sedimentar-embasamento. Note também que os valores dos contrastes de densidade dentro de uma mesma camada estão mais próximos entre si, comparado com o resultado de $\lambda_2(\mathbf{p})$ (Figura 4b). No entanto, ocorreu um desajuste com os dados (Figura 7a) como consequência da geometria não sofrer mudança, comparando com a Figura 4b, e os contrastes de densidade ficarem constantes nas camadas logo acima dos altos A e B. Além disso, nas porções mais profundas, entre 7 e 30 km, o contato não ficou corretamente delineado. A Tabela 4 apresenta os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_3(\mathbf{p})$.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(\mathbf{p})$ – caso em que se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^0
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	3×10^{-4}

Fonte: Do autor.

Figura 7 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).



3.3 Inversão sem informação de poço

Nos procedimentos de inversão a seguir, a região que contém a bacia sedimentar foi discretizada na mesma quantidade de prismas que nos procedimentos de inversão anteriores. Utilizamos também a informação a priori do contraste de densidade superficial verdadeiro e da localização das bordas laterais do modelo verdadeiro simulado. No entanto, nesta abordagem, prescindimos da informação a priori sobre a distribuição vertical da densidade fornecida por furos de sondagens.

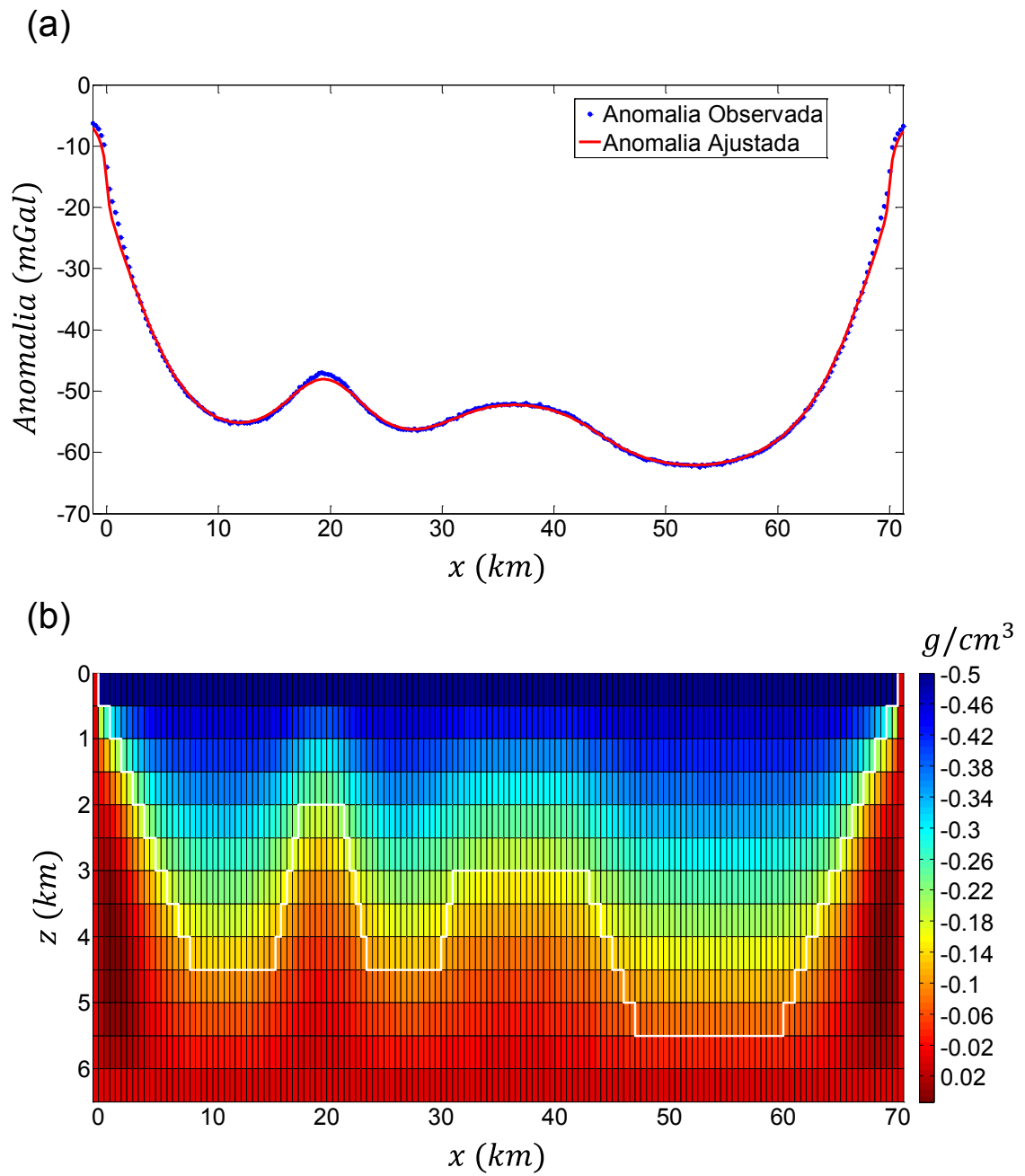
A Figura 8b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$. O resultado obtido se assemelha com o da Figura 3b, apesar de não serem utilizados dados de poço e o correspondente vínculo de igualdade absoluta. A Figura 8a mostra a anomalia gravimétrica ajustada em linha vermelha contínua. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_1(\mathbf{p})$ estão na Tabela 5.

Tabela 5 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(\mathbf{p})$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-6}
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}
$\phi_5^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}

Fonte: Do autor.

Figura 8 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).



Fonte: Do autor.

Para utilizarmos os funcionais ϕ_2^{l2} e ϕ_6^{l1} , na inversão $\lambda_2(\mathbf{p})$, precisaremos estimar uma lei de decaimento do contraste de densidade. Enquanto o funcional ϕ_2^{l2} necessita de informação a priori do contraste de densidade das camadas para o critério de avaliação da meia-densidade, o funcional ϕ_6^{l1} necessita da informação da variação do contraste de densidade para a construção do vetor \mathbf{c} (Apêndice B). Então, construímos a solução intermediária $\lambda^*(\mathbf{p})$ e, a partir do resultado dessa solução, selecionamos uma região do modelo estimado e estimamos a lei de decaimento do contraste.

A Figura 9b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda^*(\mathbf{p})$. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda^*(\mathbf{p})$ estão na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda^*(\mathbf{p})$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}
$\phi_4^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-2}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	5×10^{-2}

Fonte: Do autor.

Para estimarmos a lei de decaimento do contraste de densidade selecionamos a região E dos parâmetros estimados pela solução $\lambda^*(\mathbf{p})$ localizada entre 50 e 60 km no eixo x (retângulo branco na Figura 9b). Dentro desta região E selecionamos para cada coluna de prismas alguns valores de contraste de densidade estimado através do procedimento apresentado na seção 2.2.2. Além de obter a lei de decaimento, localizamos a provável descontinuidade pacote sedimentar-embasamento da região E pela localização da camada mais profunda de parâmetros selecionados. A Figura 10 mostra a nuvem de parâmetros estimados e

selecionados da região E (pontos pretos), a lei verdadeira do decaimento vertical do contraste de densidade (linha azul contínua) e a lei estimada (linha tracejada vermelha) ajustando-se uma reta a nuvem de pontos. Notamos que os pontos da nuvem estão muito próximos entre si, que o gradiente vertical do contraste de densidade é bem representado por lei linear, e que a profundidade do embasamento foi muito bem localizada. O erro do coeficiente angular da reta ajustada é de 5% em relação ao verdadeiro.

Figura 9 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda^*(p)$ e região E selecionada para a estimativa da lei de contraste de densidade (retângulo branco).

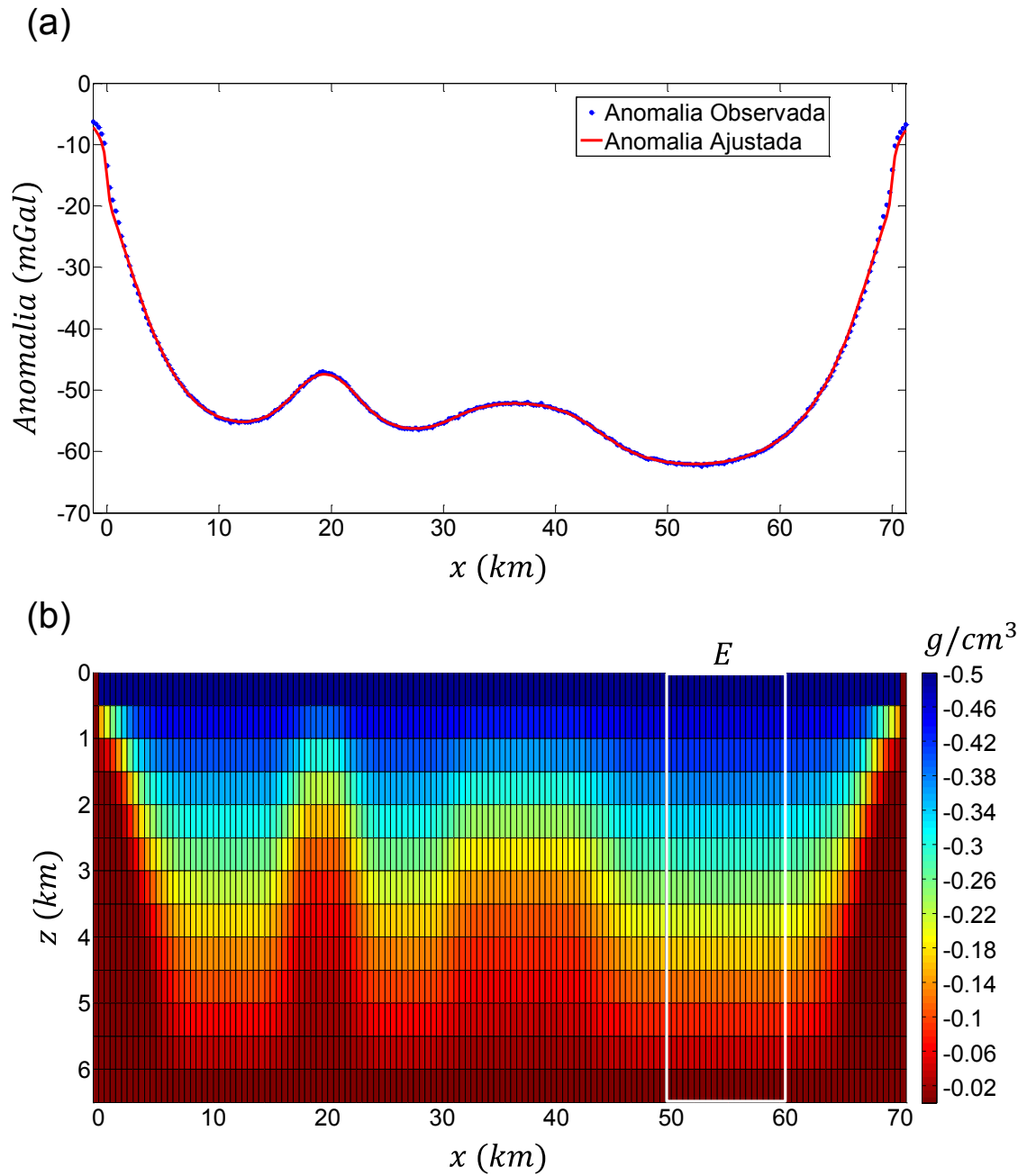
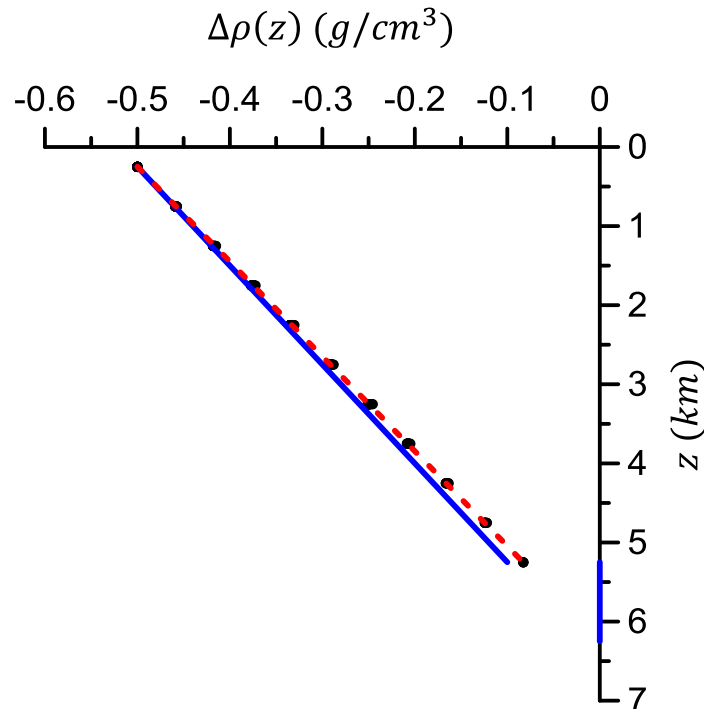


Figura 10 – Nuvem de 163 pontos (pontos pretos) que representam os contrastes de densidade da região E (Figura 9b) estimados por $\lambda^*(\mathbf{p})$. Lei de decaimento do contraste de densidade verdadeiro (linha azul contínua) e a lei de decaimento estimada (linha vermelha tracejada).



Fonte: Do autor

Utilizamos a informação da lei de decaimento estimada para a construção de um poço virtual posicionado na mesma coordenada do poço verdadeiro ($x = 55,5 \text{ km}$). Finalmente, após a construção deste poço virtual procedemos com a solução $\lambda_2(\mathbf{p})$. Nesta solução $\lambda_2(\mathbf{p})$ utilizamos o poço virtual explicitamente no funcional regularizador de igualdade absoluta ϕ_1^{l2} e implicitamente nos funcionais regularizadores ϕ_2^{l2} e ϕ_6^{l1} .

A Figura 11b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(\mathbf{p})$. Notamos que o topo e as bordas do alto estrutural A estão bem localizados, no entanto, o alto B e a região profunda entre 7 e 30 km não são tão bem delineados.

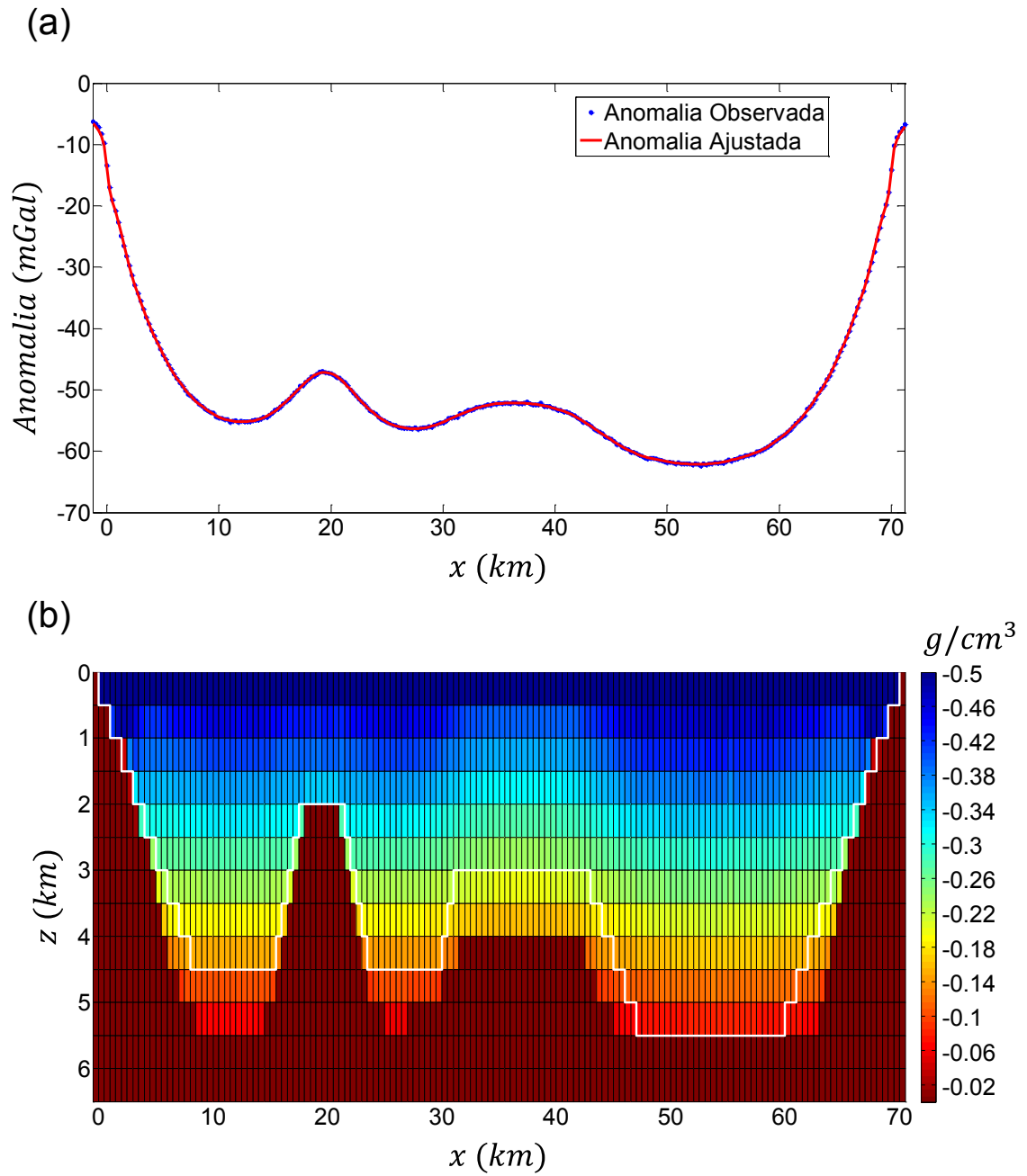
A Figura 11a mostra a anomalia ajustada (linha vermelha contínua) por esta solução $\lambda_2(\mathbf{p})$. Note que a anomalia ajustada é muito próxima da observada (Figura 11a). Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_2(\mathbf{p})$ estão na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(\mathbf{p})$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_2^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}
$\phi_3^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-4}
$\phi_4^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-4}
$\phi_6^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}

Fonte: Do autor.

Figura 11 – (a) Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); (b) Estimativa da distribuição do contraste de densidade via inversão não linear $\lambda_2(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).



Fonte: Do autor.

A Figura 12b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(\mathbf{p})$. Podemos observar que os valores estimados dos contrastes de densidade de uma mesma camada estão mais próximos entre si. Observamos também um melhor delineamento do relevo do embasamento na região mais profunda da bacia. Entretanto, ocorre o mesmo erro no delineamento dos baixos mostrado na Figura 7b da solução $\lambda_3(\mathbf{p})$ com informação de poço. A Figura 12a mostra a anomalia ajustada (linha vermelha contínua). Note que o desajuste é menor se comparado com o da Figura 7a. A Tabela 8 apresenta os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_3(\mathbf{p})$.

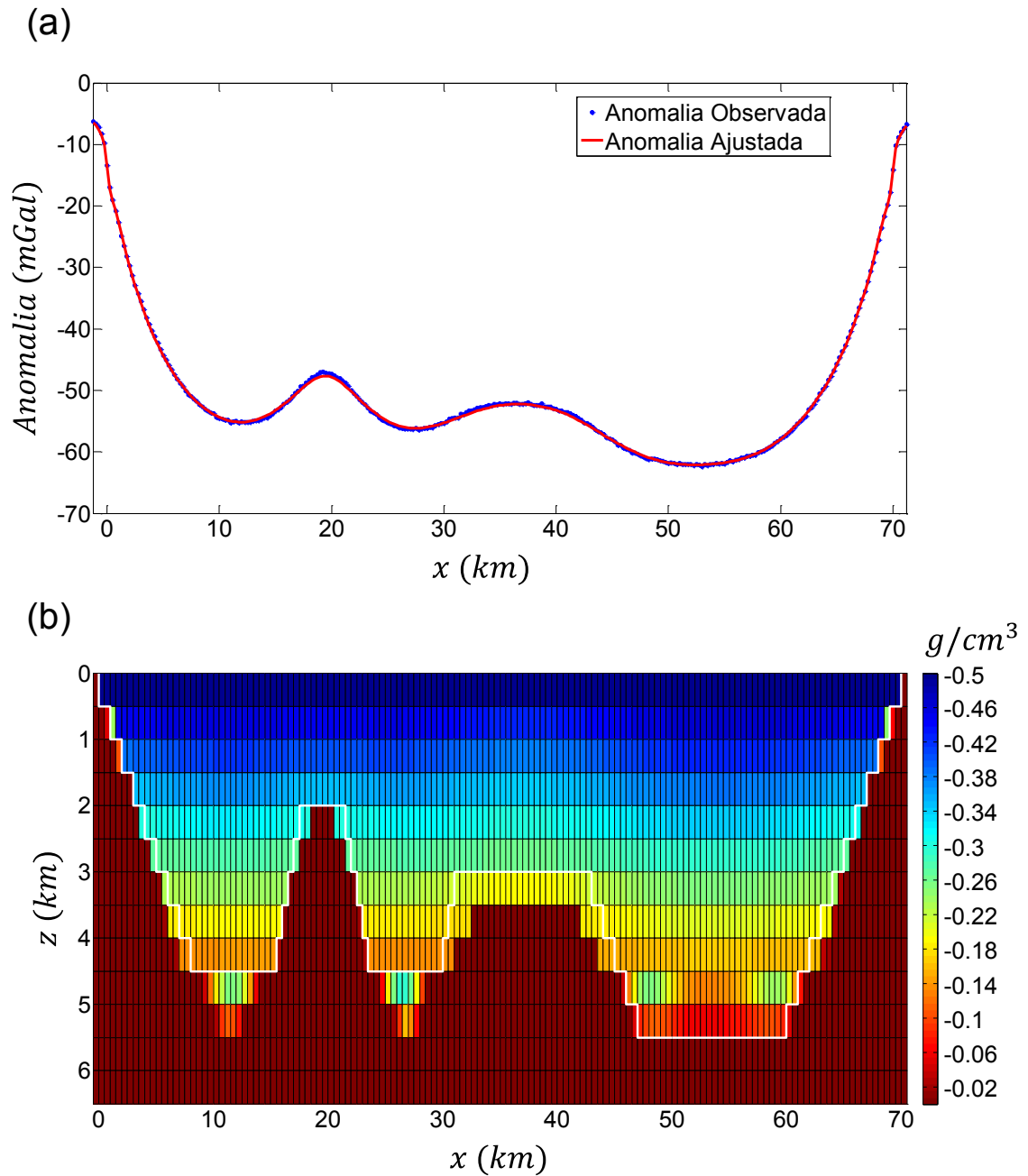
Tabela 8 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(\mathbf{p})$ – caso em que não se utiliza informação a priori de dados de poço.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-1}
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-1}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-4}

Fonte: Do autor.

Verificamos em testes sintéticos não mostrados que a metodologia apresentada não abrange bacias sedimentares com relevo do embasamento extremamente abrupto contendo rejeitos com ângulos em torno de 90°. Além disso, para casos em que o contraste de densidade não pode ser representado por uma lei linear, a estimativa da lei de contraste de densidade não é satisfatória, bem como o delineamento do relevo do embasamento.

Figura 12 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (linha azul pontilhada) e estimada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via inversão não linear $\lambda_3(p)$ e superfície do relevo do embasamento verdadeiro (linha branca).

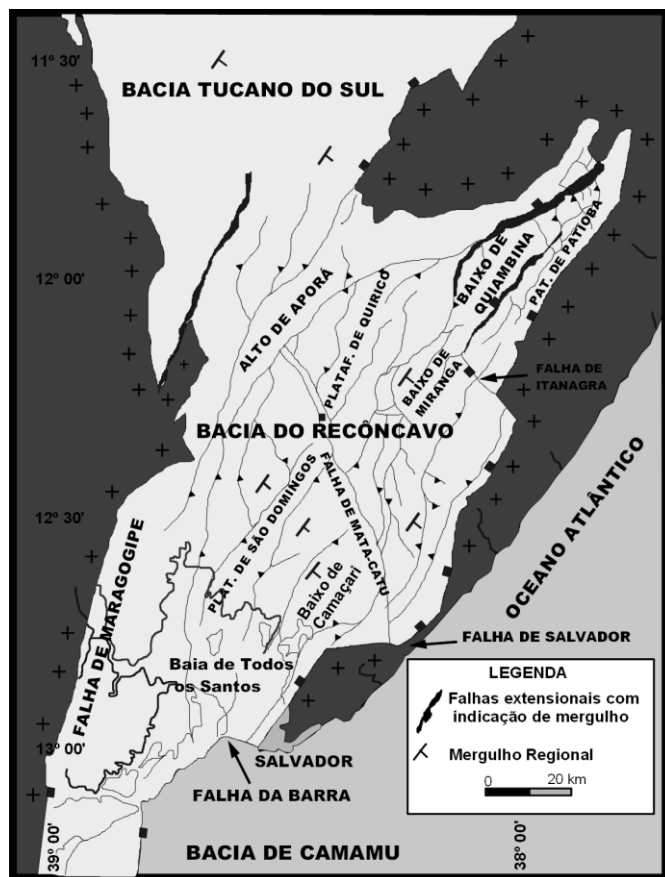


4 APLICAÇÃO A DADOS REAIS DA BACIA DO RECÔNCAVO

4.1 Informações geológicas e geofísicas

A Bacia do Recôncavo localiza-se no estado da Bahia, nordeste do Brasil, ocupando uma área de aproximadamente 11.500 km^2 . Seus limites são representados pelo Alto de Aporá, a norte e noroeste; pelo sistema de falhas da Barra, a sul; pela Falha de Maragogipe, a oeste; e pelo sistema de falhas de Salvador, a leste (Figura 13).

Figura 13 – Localização, limites e arcabouço estrutural da bacia do Recôncavo, mapeado ao nível da seção pré-rift.

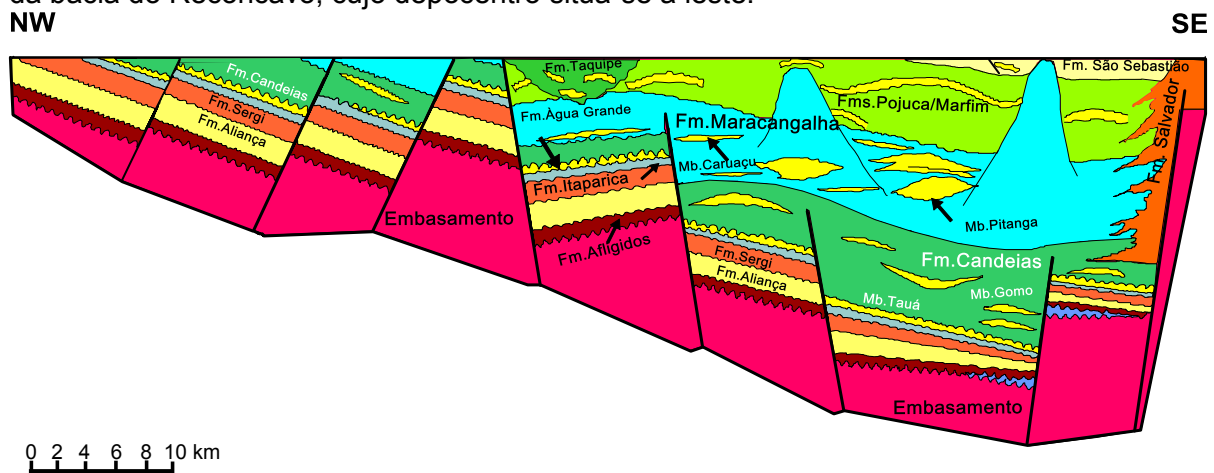


Fonte: Milhomem et al. (2003).

A Bacia do Recôncavo teve sua origem e evolução a partir da ruptura do continente da Gondwana e a conseqüente abertura do Oceano Atlântico Sul durante

o período Jurássico. Sua arquitetura básica é a de um meio-gráben, com falha de borda a leste e orientação geral NE-SW (Figura 14). O mergulho regional das camadas para leste é condicionado por falhamentos normais planares com direção preferencial N30°E (SILVA et al., 2007). Segundo Milani e Davison (1988), na sub-bacia oeste, os ângulos de mergulhos dos planos de falhas são entorno de 60° e o embasamento alcança no máximo 6 km de profundidade.

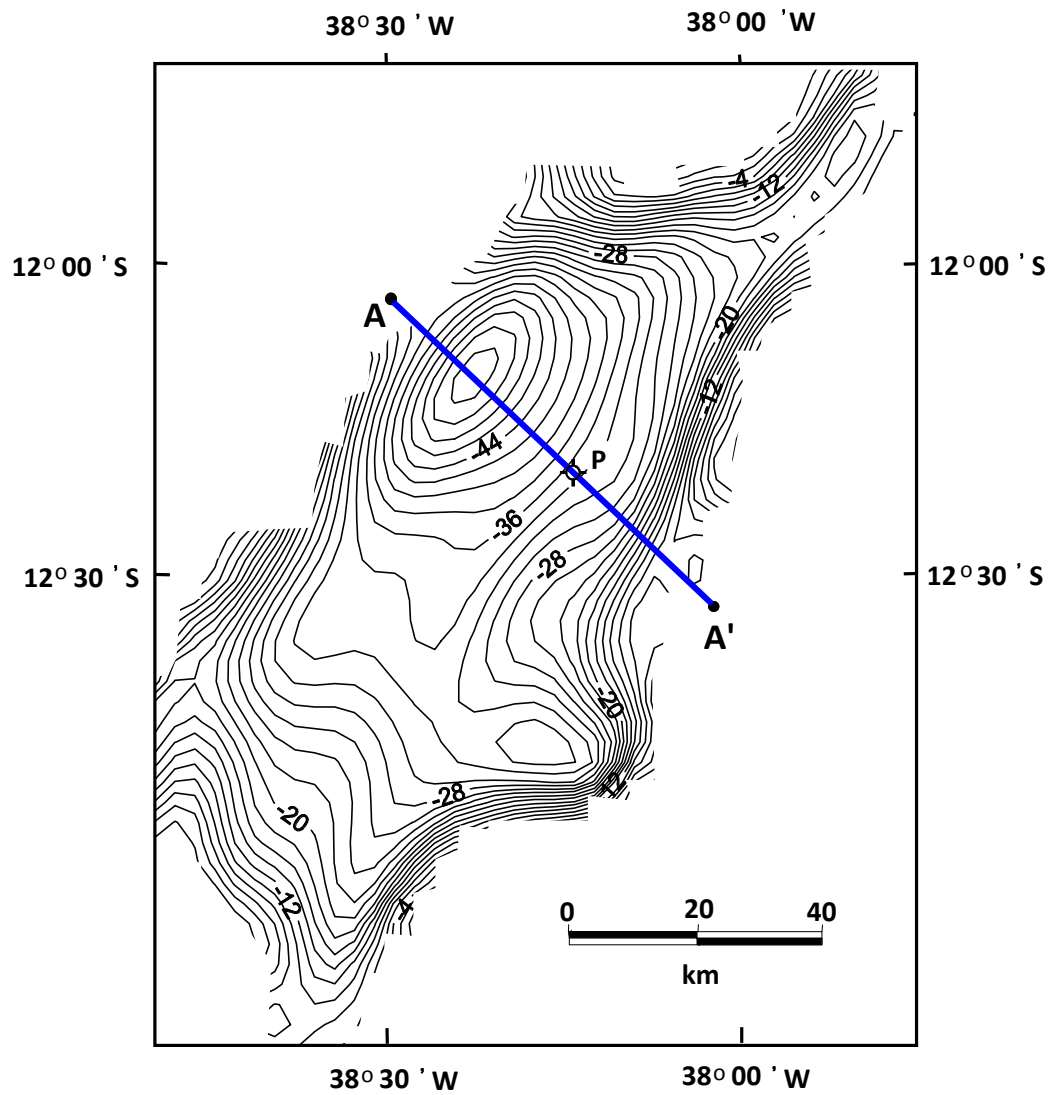
Figura 14 – Seção geológica esquemática NW-SE, ilustrando a morfologia de meio-gráben da bacia do Recôncavo, cujo depocentro situa-se a leste.



Fonte: Milhomem et al. (2003).

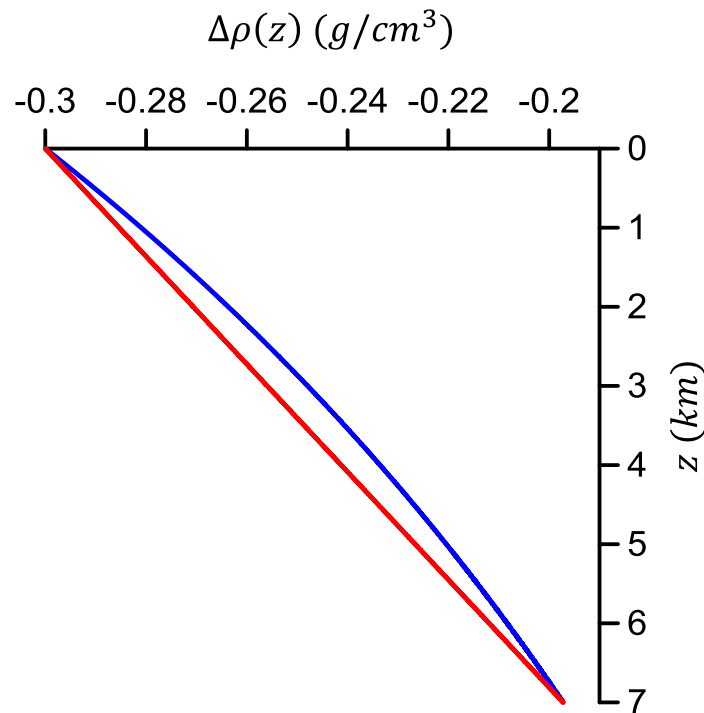
A Figura 15 mostra o mapa de anomalias Bouguer corrigido dos efeitos da variação do nível da Moho e de fontes intra-sedimentares (LEÃO et al., 1996). Silva et al. (2006) traçam um perfil AA' na direção NW-SE transversal a bacia (linha azul na Figura 15). O poço P (Figura 15) alcança o embasamento na profundidade de 2,88 km em $x = 39,7$ km ao longo do perfil AA'. Silva et al. (2006) estimaram o contraste de densidade superficial ($\Delta\rho_0 = -0,3 \text{ g/cm}^3$) e o fator que controla o decaimento do contraste de densidade para uma lei hiperbólica (LITINSKY, 1989). A Figura 16 mostra o perfil de contraste de densidade estimada por Silva et al. (2006), linha azul, e o perfil de contraste de densidade linear, linha vermelha. Este perfil de contraste de densidade linear foi obtido simplesmente unindo o primeiro ($z = 0,0 \text{ km}$) e último ($z = 7,0 \text{ km}$) ponto do perfil hiperbólico.

Figura 15 – Mapa gravimétrico devido ao relevo do embasamento da Bacia do Recôncavo e a posição do perfil AA' interpretado por Silva et al (2006). Intervalo de contorno de 2 *mGal*. O poço P localiza-se em $x = 39,7$ km ao longo de AA'.



Fonte: Leão et al. (1996)

Figura 16 – Variação hiperbólica do contraste de densidade (linha azul) e a variação linear do contraste de densidade (linha vermelha) com a profundidade z . A variação de densidade com a profundidade assume um embasamento com densidade de $2,7 \text{ g/cm}^3$.



Fonte: Do autor.

4.2 Resultados

A Figura 17a mostra 33 observações gravimétricas (pontos azuis) ao longo do perfil AA'. O modelo interpretativo consiste em 72×20 prismas dispostos em uma malha não regular nas direções x e z . As dimensões dos prismas na direção do eixo x é de 1 km e, na direção do eixo z é de $0,25 \text{ km}$ até a profundidade de $3,0 \text{ km}$ e, a partir desta, de $0,5 \text{ km}$ até a profundidade de $7,0 \text{ km}$. A bacia compreende a extensão de, aproximadamente, 70 km ao longo do perfil AA'.

Nos procedimentos de inversão a seguir, utilizamos a informação do poço P com a aproximação linear do contraste de densidade no funcional $\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$. Utilizamos também como limite inferior no vínculo de desigualdade (equação 6) o valor $-0,35 \text{ g/cm}^3$.

A Figura 17b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$. Tal como nos testes sintéticos, essa solução fornece resultados com distribuição do contraste de densidade que não delinea o relevo do

embasamento, além de apresentar valores positivos de contraste. Nesta Figura 17b, bem como nas Figuras 18b e 19b, a última coluna do modelo (posição 72 km) apresenta a variação linear do contraste de densidade com a profundidade até a profundidade de 6,5 km (fornecida pela Figura 16) não sendo uma estimativa. Portanto, esta última coluna é uma guia para auxiliar a interpretação.

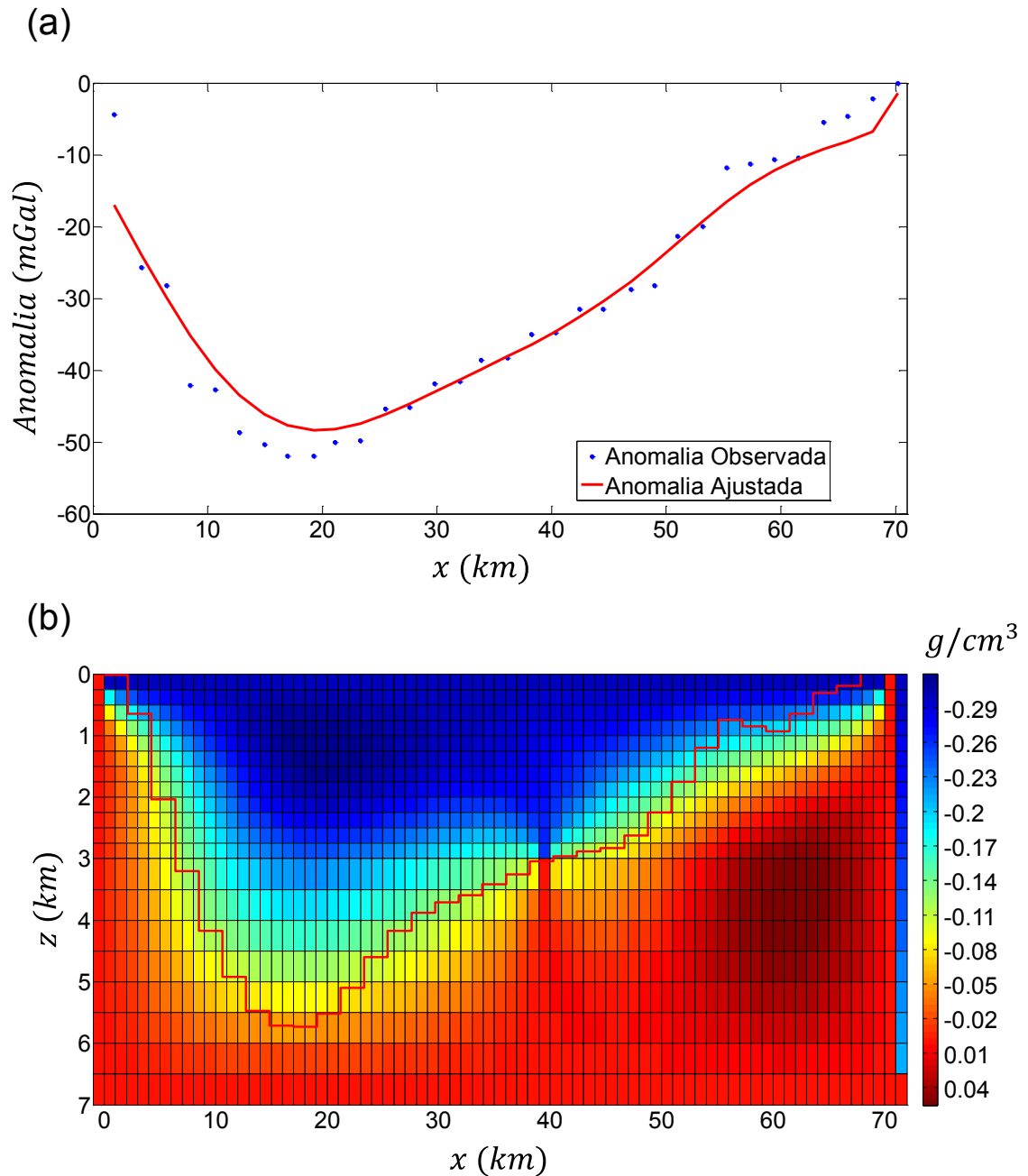
A Figura 17a mostra a anomalia ajustada em linha vermelha. O relevo do embasamento estimado por Silva et al. (2006) é apresentado na Figura 17b (linha vermelha). Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_1(\mathbf{p})$ estão na Tabela 9.

Tabela 9 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_1(\mathbf{p})$ – inversão de dados reais.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-6}
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-2}
$\phi_5^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-2}

Fonte: Do autor.

Figura 17 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_1(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha vermelha). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).



Fonte: Do autor.

Na solução $\lambda_2(\mathbf{p})$ utilizamos a informação do poço P extrapolada até a profundidade de 6,5 km nos funcionais ϕ_2^{l2} e ϕ_6^{l1} (Figura 16).

A Figura 18b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(\mathbf{p})$. Note que nesta estimativa o contorno do pacote sedimentar se aproxima da estimativa de Silva et al. (2006) (linha branca na Figura 18b). Em ambos os resultados é localizado o baixo estrutural de Alagoinha próximo da profundidade de 6 km. A anomalia ajusta é mostrada na Figura 18a (linha vermelha). A Figura 19 mostra as superfícies utilizadas ao decorrer das iterações para a construção dos funcionais $\phi_2(\mathbf{p})$ e $\phi_6(\mathbf{p})$. A Figura 20 mostra o comportamento assintótico do funcional do ajuste (ϕ^g) e da função objeto $\lambda_2(\mathbf{p})$ nas últimas iterações. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_2(\mathbf{p})$ estão na Tabela 10.

Tabela 10 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_2(\mathbf{p})$ – inversão de dados reais.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_2^{l2}(\mathbf{p})$	2×10^{-4}
$\phi_3^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}
$\phi_4^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-3}
$\phi_6^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-5}

Fonte: Do autor.

Figura 18 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_2(\mathbf{p})$ e a superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha branca). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).

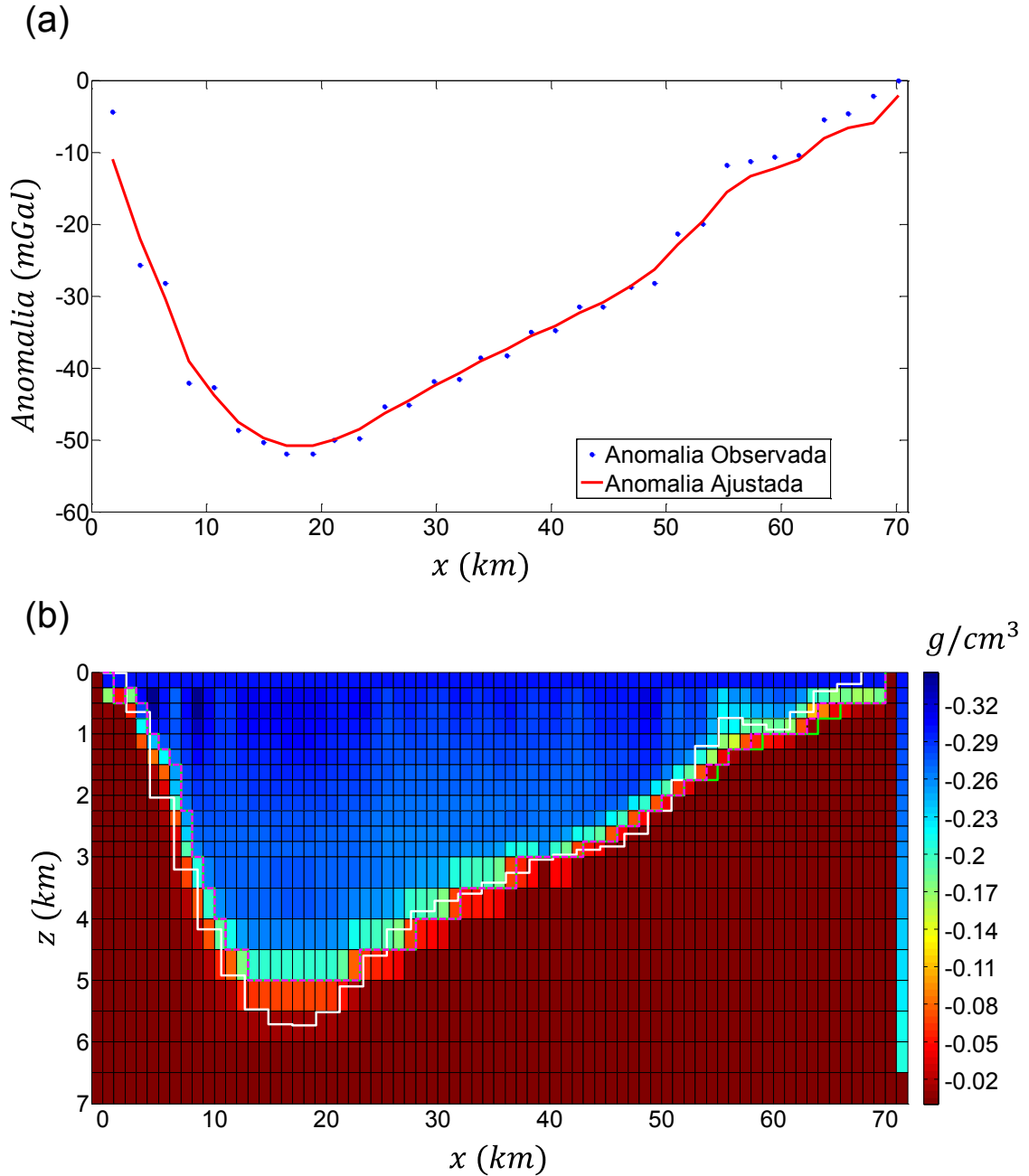
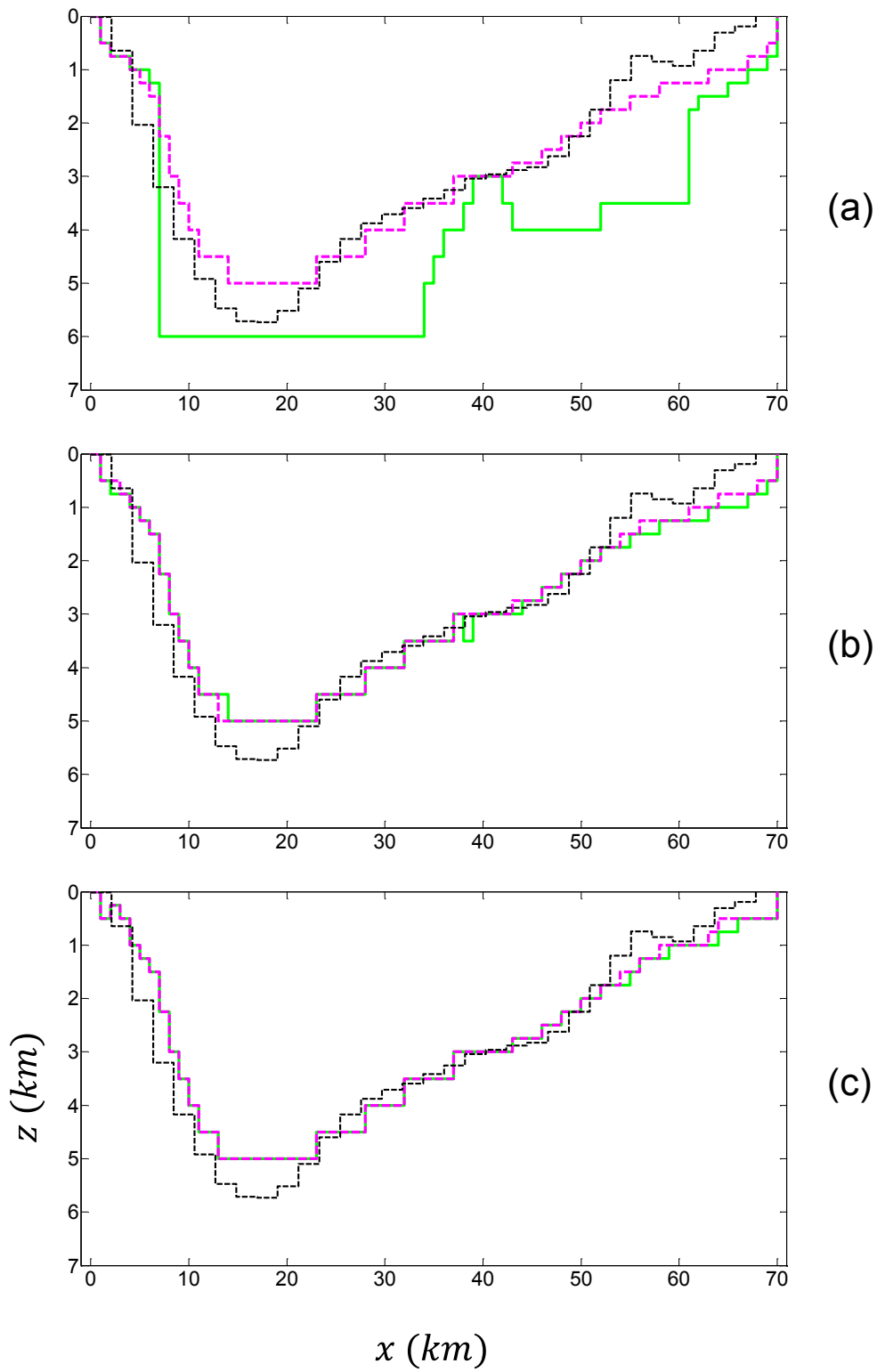
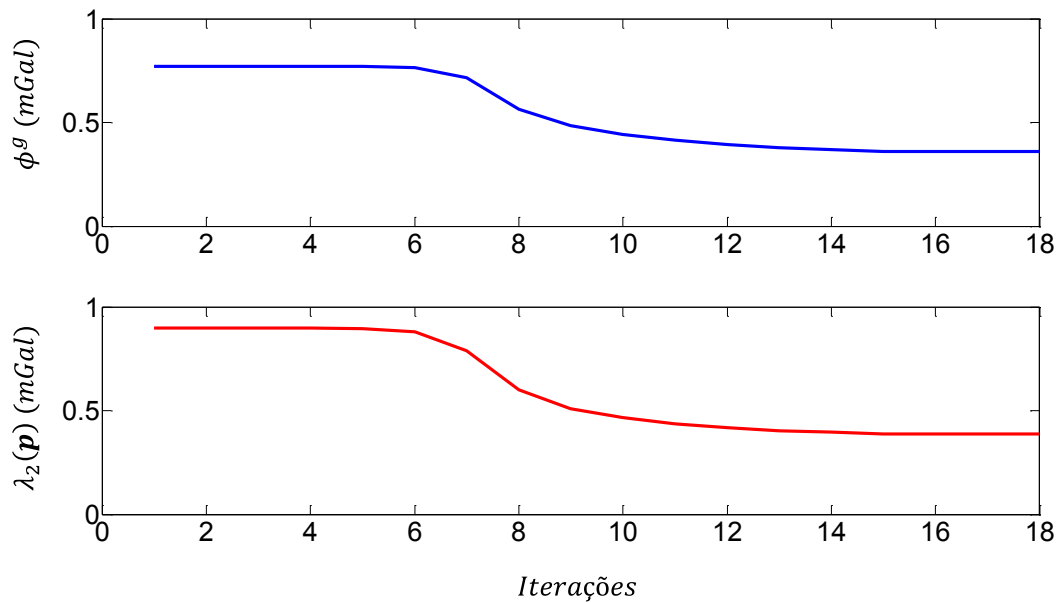


Figura 19 – Superfícies utilizadas pelos funcionais $\phi_2^{l_2}(\mathbf{p})$ (linha magenta tracejada) e $\phi_6^{l_1}(\mathbf{p})$ (linha verde contínua) nas iterações 1 (a), 9 (b) e 18 (c) e o relevo estimado por Silva et al. (2006) em linha preta tracejada.



Fonte: Do autor.

Figura 20 – Funcional do ajuste ϕ^g (linha azul) – gráfico superior – e função objeto $\lambda_2(\mathbf{p})$ (linha vermelha) – gráfico inferior – ao decorrer das 18 iterações.



Fonte: Do autor.

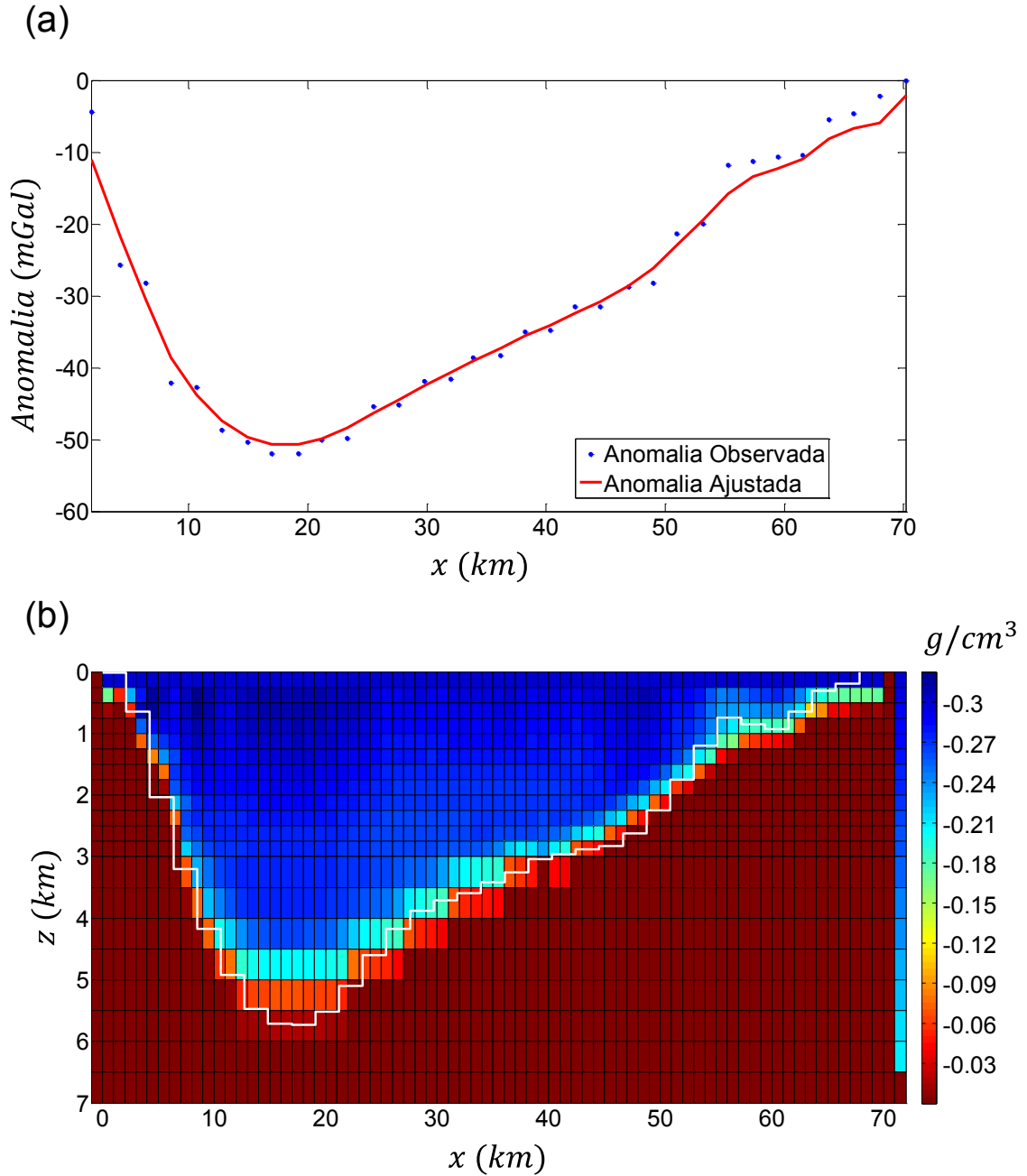
A Figura 19b mostra a estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(\mathbf{p})$. Note que em quase toda região do pacote sedimentar o contraste de densidade estimado em uma mesma camada é constante. Além disso, como esperado para a solução $\lambda_3(\mathbf{p})$, houve uma melhor definição do delineamento do contato pacote sedimentar-embasamento. A Figura 19a mostra a anomalia ajustada em linha vermelha. Os valores dos parâmetros de regularização dos funcionais utilizados em $\lambda_3(\mathbf{p})$ estão na Tabela 11.

Tabela 11 – Valores dos parâmetros de regularização dos funcionais que compõem $\lambda_3(\mathbf{p})$ – inversão de dados reais.

Funcional regularizador (ϕ_η^l)	Parâmetro de regularização (μ_η)
$\phi_1^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_3^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^1
$\phi_4^{l2}(\mathbf{p})$	1×10^{-1}
$\phi_5^{l1}(\mathbf{p})$	1×10^{-1}

Fonte: Do autor.

Figura 21 – **(a)** Anomalia gravimétrica observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha contínua); **(b)** Estimativa da distribuição do contraste de densidade via solução $\lambda_3(\mathbf{p})$ e superfície do relevo do embasamento estimada por Silva et al. (2006) (linha branca). A última coluna do modelo interpretativo é a variação linear do contraste de densidade com a profundidade (Figura 16).



Fonte: Do autor.

5 CONCLUSÃO

Apresentamos uma metodologia que recupera, simultaneamente, a distribuição do contraste de densidade e o relevo do embasamento de bacias sedimentares 2D. O método apresentado supõe que a lei de decaimento do contraste de densidade, entre pacote sedimentar e embasamento, seja linear com a profundidade. Supomos também que é conhecido o contraste de densidade na camada superficial da bacia. Além disso, a informação de furos de sondagem pode ser utilizada, mas não é totalmente necessária.

Apresentamos três soluções distintas, que se completam, para a obtenção do resultado final das estimativas. A primeira solução é obtida via inversão linear e destacamos o funcional Tikhonov de segunda ordem aplicado aos parâmetros verticalmente adjacentes. Este funcional, além de estabilizar a solução, adiciona informação de que o contraste de densidade varia linearmente com a profundidade. A segunda solução é obtida via inversão não linear e a estabilizamos utilizando um conjunto de funcionais regularizadores, dentre eles destacamos os funcionais que selecionam superfícies para delimitar a base do pacote sedimentar. Esses funcionais vinculam a solução e estas superfícies convergem iterativamente para interface sedimento-embasamento. Por fim, a terceira solução é obtida via inversão não linear e destacamos a forma como os funcionais foram utilizados. Nessa solução, selecionamos três regiões nas quais três diferentes funcionais são aplicados, havendo sobreposição destas regiões em seus limites.

Aplicamos esta metodologia a dados sintéticos e avaliamos dois casos, quando temos disponível informação de dados poços e quando não a temos. No caso em que não se usa essa informação, adicionamos uma etapa para a estimativa da lei de decaimento do contraste de densidade. Essa estimativa foi muito bem sucedida em testes sintéticos e na recuperação da lei verdadeira. Os resultados obtidos quando utilizamos a informação de dados de poço ou, quando não a utilizamos, foram concorrentes. Em ambos os casos a estimativa recuperou a distribuição de densidade verdadeira e delineou o relevo do embasamento.

Aplicamos deste trabalho a dados reais da Bacia do Recôncavo (Brasil). A estimativa delineou o relevo do embasamento e o resultado é condizente com as informações geológicas e com trabalhos anteriores.

A metodologia apresentada apresenta duas limitações, a primeira de não conseguir recuperar feições extremamente abruptas do relevo do embasamento e a segunda de não conseguir estimar a lei de contraste de densidade de pacotes sedimentares cuja variação da densidade não possa ser representada por lei linear.

Por fim, a metodologia apresentada pode ainda ser estendida a fim de ser aplicada em dados gravimétricos 2D para a estimativa da densidade de bacias tridimensionais. A metodologia também pode ser estendida para casos em que o contraste de densidade do pacote sedimentar é representado por lei quadrática, incorporando-se implicitamente esta informação nos regularizadores de Tikhonov de segunda e terceira ordem. Além disso, destacamos que este modelo interpretativo de blocos, seja 2D ou 3D, permite a fácil interação com outros métodos geofísicos, podendo ser aplicado na construção de inversão conjunta.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C. Generalized compact gravity inversion. *Geophysics*, v. 59, n. 1, p. 57-68, 1994.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. Gravity inversion of basement relief using approximate quality constraints on depths. *Geophysics*, v.62, n.6, p.1745-1757, 1997.
- _____. Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations. *Geophysics*, v. 64, n. 3, p. 754-764, 1999a.
- _____. Gravity inversion of a discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth. *Geophysics*, v. 64, n. 5, p. 1429-1438, 1999b.
- BERTETE-AGUIRRE, H.; CHERKAEV, E.; ORISTAGLIO, M. Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional. *Geophys. J. Int*, v. 149, p. 499-507, 2002.
- GUILLEN, A.; MENICHETTI, V. Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional. *Geophysics*, v. 49, n. 8, p. 1354-1360, 1984.
- HADAMARD, J. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Bull Princeton Univ., v. 13, p. L-20. 1902.
- HUBERT, M. K. A line-integral method of computing the gravimetric effects of two-dimensional masses. *Geophysics*, v. 13, p. 215-225, 1948.
- LAST, B. J.; KUBIK, K. Compact gravity inversion. *Geophysics*, v. 48, n. 6, p. 713-721, 1983.
- LEÃO, J. W. D.; MENEZES, P. T. L.; BELTRÃO, J. F.; SILVA, J. B. C. Gravity inversion of basement relief constrained by the knowledge of depth at isolated points. *Geophysics*, v. 61, n. 6, p. 1702-1714, 1996.
- LITINSKY, V. A. Concept of effective density: Key to gravity determinations for sedimentary basins. *Geophysics*, v. 54, n. 11, 1474-1482. 1989.
- LUIZ, J. G. *Informação a priori na inversão de dados magnetotelúricos*. 1999. 94f. Tese (Doutorado) – UFPA, 1999.
- MARQUADT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal Of The Society For Industrial And Applied Mathematics*. v. 11, n. 2, p. 431-441, 1963.
- MARTINS, C. M. *Inversão gravimétrica do relevo 3D de bacias sedimentares e da variação da densidade usando informação a priori sobre o ambiente geológico*. 2009. 117f. Tese (Doutorado) – ON, 2009.

MARTINS, M.C.; LIMA, W.A.; BARBOSA, V.C.F.; SILVA, J.B.C. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 – mathematical details and applications. *Geophysics*, V.76, n.1, p.11-112, 2011.

MEDEIROS, W. E.; SILVA, J. B. C. Geophysical inversion using approximate equality constraints. *Geophysics*, v. 61, n. 6, p. 1678-1688, 1996.

MILANI, E. J.; DAVISON, I. Basement control and transfer tectonics in the Recôncavo-Tucano-Jatobá rift, northeast Brazil. *Tectonophysics*, v. 154, p. 41-70, 1988.

MILHOMEM, P. S.; DE MAMAN, E. J.; OLIVEIRA, F. M.; CARVALHO, M. S. S.; SOUZA-LIMA, W. Bacias sedimentares Brasileiras: Bacia do Recôncavo. Disponível em: < http://www.phoenix.org.br/Phoenix51_Mar03.html >, n. 51. 2003.

MURTHY, I. V. R.; RAO, D. B. Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with contrast varying with depth. *Geophysics*, v. 44, n. 9, p. 1525-1530, 1979.

SILVA, J. B. C.; HOHMANN, G. W. Airborne magnetic susceptibility mapping. *Explor. Geophys*, v. 15, p. 1-13, 1984.

SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Potencial-field inversion: choosing the appropriate technique to solve a geologic problem. *Geophysics*, v. 66, n. 2, p. 511-520, 2001.

SILVA, O. B.; CAXIETA, J. M.; MOLHOMEM, P. S.; KOSIN, M. D. Bacia do Recôncavo. *Boletim de Geoc. da PETROBRAS*, v. 15, n2, 2007

SILVA, J. B. C.; COSTA, D. C. L.; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth. *Geophysics*, v. 71, n. 5, p. J51-J58, 2006.

SILVA, J. B. C.; SANTOS, D. F.; GABARITO, G. Harmonic and biharmonic biases in potential field inversion. *Geophysics*, v. 79, n. 1, p. G15-G25, 2014.

TIKHONOV, A. N.; ARSEININ, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. Washington: V.H. Winston & Sons, 1977. 258p.

ZHOU, X. 2D vector gravity potential and line integrals for the gravity anomaly caused by a 2D mass of depth-dependent density contrast. *Geophysics*, v. 73, n. 6, p. I43-I50, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Solução analítica do sinal gravimétrico e otimização computacional

Neste apêndice apresentamos a solução analítica da equação 3 simplificando a integral de superfície por uma integral de linha (HUBBERT, 1948), para o caso de prismas com contraste de densidade constante. Zhou (2008) utiliza o Teorema de Stokes para transformar a integral de superfície em integral de linha, e assim a equação 3 torna-se,

$$\Delta g_i(x_i, z_i) = -2\gamma \cdot \Delta\rho_j \oint \tan^{-1} \left(\frac{(x_i - x'_j)}{(z_i - z'_j)} \right) dz'_j. \quad (\text{A-1})$$

O caminho fechado da integral de linha em A-1 consiste em percorrer as quatro arestas que delimitam o perímetro da seção $x - z$ de um prisma retangular (Figura A-1) infinito na direção ortogonal y . Uma vez que z não varia no topo e nem na base do prisma, tomando somente a integral de linha, temos,

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \tan^{-1} \left(\frac{(x_i - x'_j)}{(z_i - z'_j)} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} dz'_j, \quad (\text{A-2})$$

sendo, os limites de integração $x_1 = x_j - dx/2$, $x_2 = x_j + dx/2$, $z_1 = z_j + dz/2$, e $z_2 = z_j - dz/2$. Integrando a equação A-2 em relação à z'_j entre os limites z_1 e z_2 , temos:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \ln(r^2) + \Delta z \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \quad (\text{A-3})$$

sendo, $\Delta x = (x_i - x_j)$, $\Delta z = (z_i - z_j)$ e $r^2 = (x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2$.

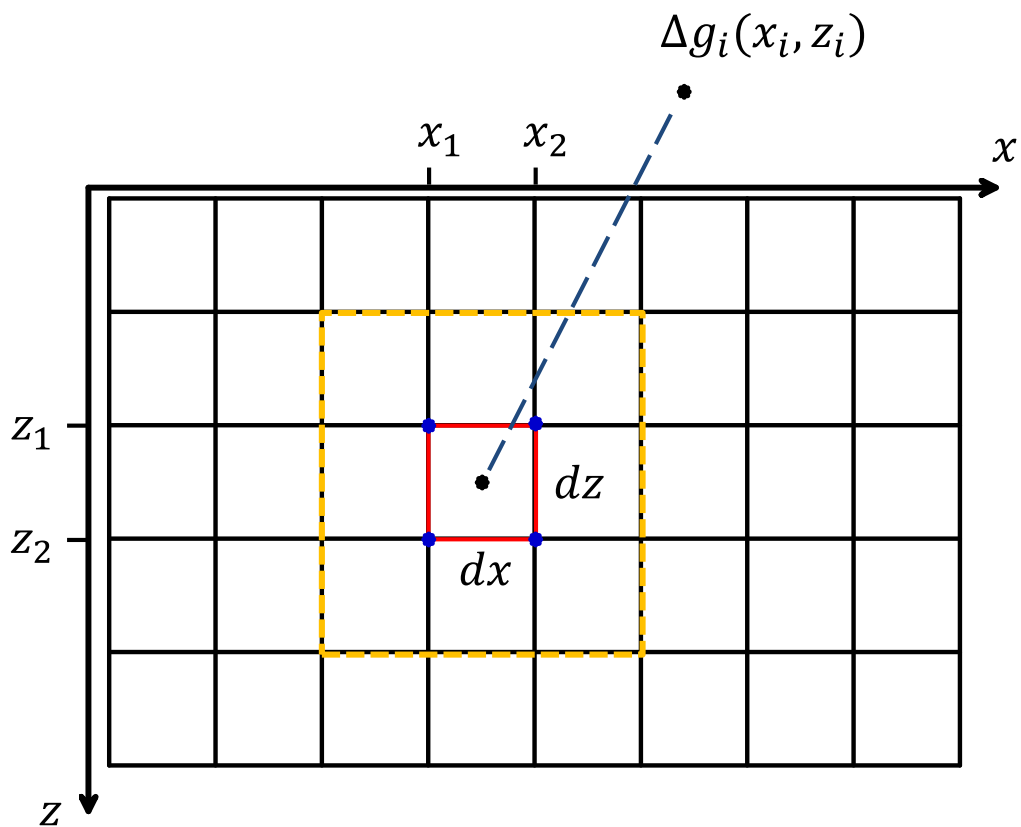
Podemos então reescrever o sinal gravimétrico produzido por um prisma com contraste de densidade constante como:

$$\Delta g_i(x_i, z_i) = -2\gamma \cdot \Delta\rho_j \cdot I \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}. \quad (\text{A-4})$$

Note que I é avaliado em cada vértice do j -ésimo prisma. Portanto ao avaliar $\Delta g_i(x_i, z_i)$ do j -ésimo prisma, o mesmo valor de I de um vértice é comum a prismas

adjacentes e não precisa ser avaliado novamente. Por conta disso, nos valemos desta redundância geométrica para obtermos otimização no tempo computacional, tanto para o cálculo da anomalia gravimétrica, quanto para o cálculo da matriz sensibilidade. A Figura A-1 mostra a região (retângulo laranja tracejado) de prismas vizinhos ao prisma (prisma vermelho) para o qual $\Delta g_i(x_i, z_i)$ está sendo avaliado.

Figura A-1 – Sinal gravimétrico no i -ésimo ponto de observação (x_i, z_i) gerado pelo j -ésimo prisma (em vermelho) de dimensões $dx \times dz$. A região dentro do retângulo laranja tracejado contém os prismas que compartilham pelo menos um vértice (pontos azuis) com o prisma vermelho.



Fonte: Do autor.

APÊNDICE B – Construção do vetor c do funcional $\phi_6(\mathbf{p}) = \|\mathbf{R}\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^l$

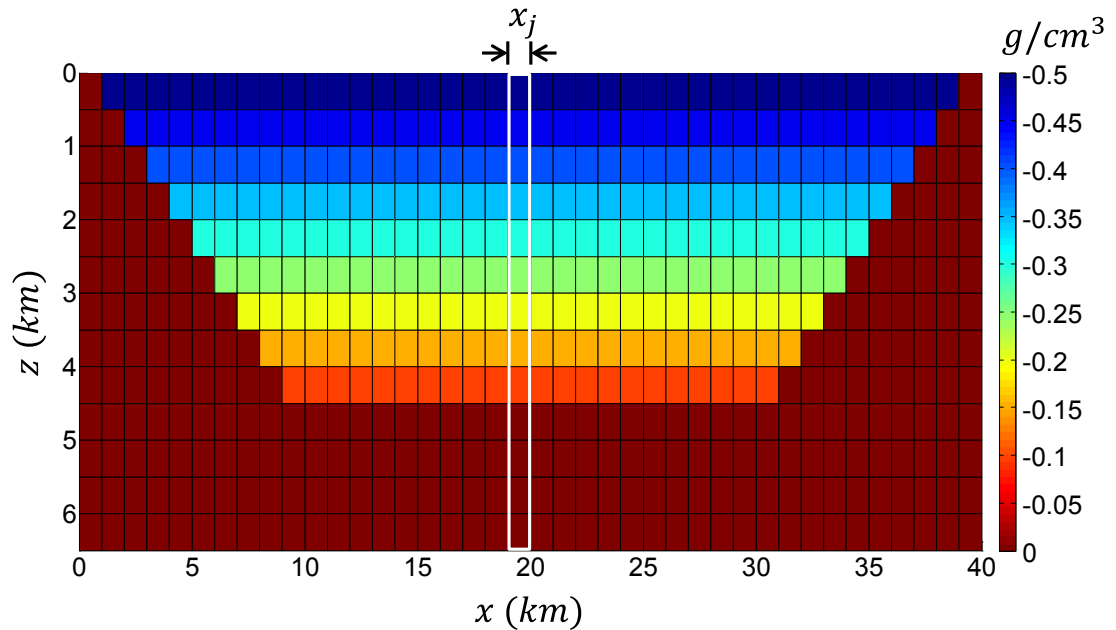
Utilizamos o funcional ϕ_6 presumindo que o contraste de densidade decresce linearmente com a profundidade dentro do pacote sedimentar (equação 1) e, que o contraste de densidade é constante e igual à zero dentro do embasamento (Figura B-1). Para mapearmos estas duas regiões de diferentes taxas de variações do contraste de densidade, utilizamos a seguinte relação entre parâmetros verticalmente adjacentes:

$$\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v|_{x_j} \mathbf{p} = -p_i + 2p_{i+1} - p_{i+2}, \quad i = 1, \dots, (m_z - 2) \quad (\text{B-1})$$

sendo x_j a localização da j -ésima coluna de prismas do modelo interpretativo no eixo- x , m_z o número de prismas em uma mesma coluna, e a matriz $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v|_{x_j}$, de dimensão $(m_z - 2) \times M$, um submatriz da matriz $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v$ (do funcional regularizador $\phi_5(\mathbf{p})$) que seleciona relações entre os parâmetros da j -ésima coluna.

A Figura B-1 mostra um exemplo de bacia sintética em que o contraste de densidade varia linearmente com a profundidade z . O vetor \mathbf{p}_t contém todos os M contrastes de densidade verdadeiros que compõe este modelo, mostrado na Figura B-1. A Figura B-2a mostra a variação vertical do contraste de densidade verdadeiro da j -ésima coluna de prismas do modelo de bacia sedimentar mostrado na Figura B-1. Na Figura B-2b, o eixo superior apresenta o resultado da equação B-1 aplicada ao perfil de contraste de densidade verdadeiro \mathbf{p}_t (linha azul), e no eixo inferior, o resultado da mesma equação B-1 aplicada aos parâmetros estimados $\tilde{\mathbf{p}}_{k-1}$ (linha magenta) da $(k - 1)$ -ésima iteração de um procedimento de inversão (não mostrado). Note que para o caso da aplicação da relação B-1 no perfil verdadeiro de contraste de densidade, a posição do valor máximo coincide exatamente com a descontinuidade do valor do contraste de densidade entre o sedimento e o embasamento. Na aplicação da relação B-1 no perfil de contraste de densidade estimado $\tilde{\mathbf{p}}_{k-1}$ a posição do valor máximo está localizada próximo da descontinuidade sedimento-embasamento.

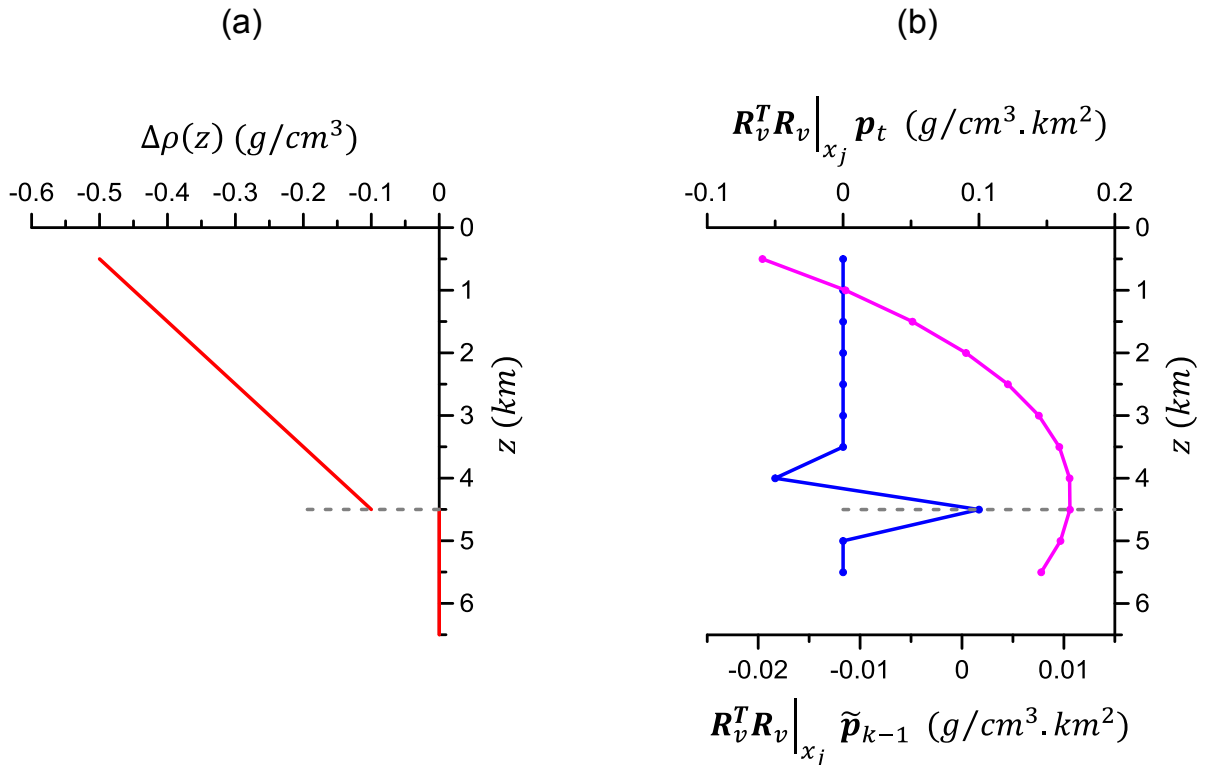
Figura B-1 – Modelo de bacia sedimentar sintética discretizado em 40×13 prismas com dimensões de $1,0 \times 0,5 \text{ km}$, nas direções x e z , respectivamente. A lei de decaimento do contraste de densidade (equação 1) tem $\Delta\rho_0$ e α iguais a $-0,5 \text{ g/cm}^3$ e $0,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}/\text{km}$, respectivamente. A espessura do pacote sedimentar na j -ésima coluna de prismas (retângulo branco) atinge $4,5 \text{ km}$.



Fonte: Do autor.

Utilizamos o critério do valor máximo do perfil $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v |_{x_j} \tilde{\mathbf{p}}_{k-1}$ para a construção do vetor \mathbf{c}_k , avaliando $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v |_{x_j} \tilde{\mathbf{p}}_{k-1}$ para todas as colunas de prismas que discretizam o modelo interpretativo. A localização do máximo valor do perfil $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v |_{x_j} \tilde{\mathbf{p}}_{k-1}$ se aproxima iterativamente da localização verdadeira da descontinuidade sedimento-embasamento.

Figura B-2 – **(a)** Lei do contraste de densidade com a profundidade da j -ésima coluna da bacia na Figura B-1; **(b)** Eixo superior: perfil obtido pela relação B-1 com a j -ésima coluna de parâmetros verdadeiros; eixo inferior: perfil obtido pela relação B-1 com a j -ésima coluna de parâmetros estimados. Em ambos os gráficos a linha cinza tracejada marca a descontinuidade entre o pacote sedimentar e o embasamento.



Fonte: Do autor.

Os elementos do vetor c recebem a variação vertical dos contrastes de densidade, informada a priori, a partir da lei de decaimento do contraste de densidade fornecida por poços de sondagem, ou pela estimativa dessa lei. Então o vetor c é construído, iterativamente, da seguinte forma:

- Os parâmetros estimados na k -ésima iteração que se localizam antes do valor máximo do perfil $R_v^T R_v |_{x_j} \tilde{p}_{k-1}$, os elementos c que tem a mesma localização desses parâmetros recebem a variação do contraste de densidade informada a priori;

- Os parâmetros estimados na k -ésima iteração que se localizam no valor máximo do perfil $R_v^T R_v |_{x_j} \tilde{p}_{k-1}$, os elementos c que tem a mesma localização desses parâmetros recebem o valor do contraste de densidade informando para essas profundidades;

– Os parâmetros estimados na k -ésima iteração que se localizam após o valor máximo do perfil $\mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v |_{x_j} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}$, os elementos c que tem a mesma localização desses parâmetros recebem o valor zero.

APÊNDICE C- Lista de Jacobianos e Hessianos

Neste apêndice apresentamos os vetores Jacobianos e as matrizes Hessianas dos funcionais ϕ_η^l ($\eta = 1, \dots, 6$) e do funcional do ajuste (ϕ^g) que compõem a equação 10.

Os Jacobianos e Hessianas recebem a mesma notação (J_η^l e H_η^l) para identificar o tipo de regularizador ($\eta = 1, \dots, 6$) e a norma empregada ($l = 1$ ou 2) que foi utilizada na metodologia. A seguir a lista de Jacobianos:

$$J_g = 2 A^T (A\mathbf{p} - \mathbf{g}^0) \quad (\text{C-1})$$

$$J_1^2 = 2 \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{Q}_1 \mathbf{p} - \mathbf{q}_1) \quad (\text{C-2})$$

$$J_2^2 = 2 (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) \quad (\text{C-3})$$

$$J_3^2 = 2 \mathbf{p} \quad (\text{C-4})$$

$$J_3^1 = \mathbf{d}_3 \quad (\text{C-5})$$

$$J_4^2 = 2 \mathbf{R}_h^T \mathbf{R}_h \mathbf{p} \quad (\text{C-6})$$

$$J_4^1 = 2 \mathbf{R}_h^T \mathbf{d}_4 \quad (\text{C-7})$$

$$J_5^1 = 2 \mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v \mathbf{d}_5 \quad (\text{C-8})$$

$$J_6^2 = 2 \mathbf{R}_v^T (\mathbf{R}_v \mathbf{p} - \mathbf{c}) \quad (\text{C-19})$$

$$J_6^1 = 2 \mathbf{R}_v^T \mathbf{d}_6 \quad (\text{C-10})$$

em que A é a matriz sensibilidade e \mathbf{d}_η ($\eta = 3, \dots, 6$) são vetores L -dimensionais, cujo l -ésimo elemento é dado por:

$$\mathbf{d}_3 \equiv \{d_{3l}\} = \frac{p_j}{[p_j^2 + \beta]^{1/2}} \quad (\text{C-11})$$

$$\mathbf{d}_4 \equiv \{d_{4l}\} = \frac{p_i - p_j}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}} \quad (\text{C-12})$$

$$\mathbf{d}_5 \equiv \{d_{5l}\} = \frac{-p_i + 2p_j - p_k}{\left[(-p_i + 2p_j - p_k)^2 + \beta\right]^{1/2}} \quad (\text{C-13})$$

$$\mathbf{d}_6 \equiv \{d_{6l}\} = \frac{p_j - c_j}{\left[(p_j - c_j)^2 + \beta\right]^{1/2}} \quad (\text{C-14})$$

A seguir a lista de Hessianas:

$$\mathbf{H}_g = 2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\text{C-15})$$

$$\mathbf{H}_1^2 = 2 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \quad (\text{C-16})$$

$$\mathbf{H}_2^2 = 2 \mathbf{I} \quad (\text{C-17})$$

$$\mathbf{H}_3^2 = 2 \mathbf{I} \quad (\text{C-18})$$

$$\mathbf{H}_3^1 = \mathbf{D}_2 \quad (\text{C-19})$$

$$\mathbf{H}_4^2 = 2 \mathbf{R}_h^T \mathbf{R}_h \quad (\text{C-20})$$

$$\mathbf{H}_4^1 = 2 \mathbf{R}_h^T \mathbf{D}_4 \mathbf{R}_h \quad (\text{C-21})$$

$$\mathbf{H}_5^1 = 2 \mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v \mathbf{D}_5 \mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v \quad (\text{C-22})$$

$$\mathbf{H}_6^2 = 2 \mathbf{R}_v^T \mathbf{R}_v \quad (\text{C-23})$$

$$\mathbf{J}_6^1 = 2 \mathbf{R}_v^T \mathbf{D}_6 \mathbf{R}_v^T \quad (\text{C-24})$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade M -dimensional e \mathbf{D}_η ($\eta = 3, \dots, 6$) são matrizes diagonais L -dimensionais, cujo l -ésimo elemento da diagonal é dado por:

$$\mathbf{D}_3 \equiv \{D_{3ll}\} = \frac{\beta}{\left[p_j^2 + \beta\right]^{3/2}} \quad (\text{C-25})$$

$$\mathbf{D}_4 \equiv \{D_{4ll}\} = \frac{\beta}{\left[(p_i - p_j)^2 + \beta\right]^{3/2}} \quad (\text{C-26})$$

$$\mathbf{D}_5 \equiv \{D_{5ll}\} = \frac{\beta}{\left[(-p_i + 2p_j - p_k)^2 + \beta\right]^{3/2}} \quad (\text{C-27})$$

$$\mathbf{D}_6 \equiv \{D_{6ll}\} = \frac{\beta}{\left[(p_j - c_j)^2 + \beta\right]^{3/2}} \quad (\text{C-28})$$

Martins (2009) apresenta uma justificativa para utilizar um termo de amortecimento somado as matrizes \mathbf{D}_η ($\eta = 3, \dots, 6$) para torná-las diagonal dominantes.

Nos procedimentos de inversão iterativa ($\lambda_2(\mathbf{p})$ e $\lambda_3(\mathbf{p})$) o vetor \mathbf{p} é avaliado na k -ésima iteração.