



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estimativa Do Relevo Do Embasamento De Bacias Sedimentares
Via Inversão Gravimétrica Linear**

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

**Belém – Pará
2017**

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

**Estimativa do Relevo do Embasamento de Bacias Sedimentares
Via Inversão Gravimétrica Linear**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Potenciais

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Mendel Martins

Coordenador: Cícero Roberto Teixeira Régis

**Belém – Pará
2017**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Oliveira, Leonardo dos Reis, 1984-

Estimativa do relevo do embasamento de bacias sedimentares via
inversão gravimétrica linear / Leonardo dos Reis Oliveira. – 2017

38 f. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Coorientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de
Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2017.

1. Gravidade (Física) - Medição. 2. Inversão (Geofísica). I. Título.

CDD 22. ed.: 526.7

Elaborado por Hélio
Braga Martins
CRB-2/698

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

**Estimativa do Relevo do Embasamento de Bacias Sedimentares
Via Inversão Gravimétrica Linear**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 18/12/2017

Conceito: BOM

Banca examinadora:



Prof. Dr. Cristiano Mendel Martins – Orientador

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará



Darcicléa Ferreira Santos – Membro

Doutora em Geofísica

Universidade Federal do Pará



Eder Cassola Molina – Membro

Doutor em Geofísica

Universidade de São Paulo

AGRADECIMENTO

Agradeço à Deus;

Agradeço aos meus pais, Jorge Pinto de oliveira e Yara dos Reis Oliveira, por todo esforço e ajuda durante todo o mestrado;

Agradeço ao meu orientador, Cristiano Mendel Martins, pelo suporte oferecido para o desenvolvimento do trabalho;

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro durante o curso;

Agradeço aos membros do comitê de avaliação do trabalho de dissertação por aceitar o convite para acrescentar sugestões de forma a enriquecer o conteúdo e melhorar o trabalho;

Agradeço à secretária Benildes Lopes Rodrigues de Souza e a coordenação do Curso de Pós-graduação em Geofísica pelo auxílio com informações relevantes durante o período de curso;

Agradeço à professora Dra. Darcicléa Ferreira Santos por ter me ofertado todas as matérias relacionadas aos Métodos Potenciais, fornecendo a base teórica necessária para o curso;

Agradeço ao José Henriques Paiva Junior pelo apoio direto no desenvolvimento da parte ilustrativa;

E agradeço ao Antônio Rizimar de Andrade Cunha pelo apoio no desenvolvimento da apresentação.

RESUMO

Cada vez mais o aperfeiçoamento tecnológico tem proporcionado a aquisição de um grande volume de dados geofísicos em distintas plataformas de aquisição, inclusive satelitais, motivo pelo qual o trabalho de interpretação das anomalias gravimétricas e de estimação do relevo de bacias sedimentares tem demandado cada vez mais inovação na formulação computacional e matemática a fim de viabilizar a plena utilização de tal oferta. Para a obtenção de uma solução eficaz e computacionalmente eficiente do problema de estimar o relevo 3D de bacias sedimentares, propomos um método que utiliza uma inversão linear, seguida de outra transformação linear, e que são aplicados iterativamente para solucionar a inversão não linear. Na formulação do procedimento de inversão linear incluímos formalmente como regularizador o funcional comumente conhecido como Suavidade Global. Com esta estimação desenvolvida garantimos eficácia na inversão e ainda conferimos maior eficiência pelo menor custo de tempo computacional exigido. Na prática, esta maior eficiência pode ser a diferença entre a possibilidade e a impossibilidade computacional de se proceder à inversão gravimétrica em levantamentos com grande volume de dados. A fim de verificar a efetividade, testamos este procedimento em um conjunto de dados gravimétricos sintéticos de uma bacia simulada com relevo do embasamento profundo e contendo feições não detectáveis pela simples inspeção visual da anomalia gravimétrica, e o relevo estimado recupera com excelente aproximação o relevo verdadeiro.

Palavras chave: Anomalia gravimétrica; inversão gravimétrica; inversão linear; inversão não linear; suavidade global; transformação linear.

ABSTRACT

Technological improvements have increasingly led to the acquisition of a large volume of geophysical data on different acquisition platforms, including satellites, which is why the work of interpreting the gravimetric anomalies and the estimation of the sedimentary basin relief is demanding more and more innovation in computational and mathematical formulation in order to make feasible the full use of such offer. In order to obtain effective solution and computationally efficient of the problem of estimating the 3D relief of sedimentary basins, we propose a method that uses a linear inversion, followed by another linear transformation, and are iteratively applied to solve the nonlinear inversion. In the formulation of the linear inversion procedure we formally include as constrain the functional commonly known as Global Smoothness. With this developed estimation we guarantee efficiency in the inversion and still give it greater efficiency due to the lower computational time required. In practice, this large tool can be the difference between a computational possibility and impossibility to carry out the gravimetric inversion in surveys with large volumes of data. In order to verify the effectiveness, we tested this procedure in a synthetic gravimetric data set of a simulated basin with deep basement relief and containing features undetectable by simple visual inspection of the gravimetric anomaly, and the estimated relief recovers with true approximation the true relief.

Key words: Gravimetric anomalies; gravimetric inversion; linear inversion; nonlinear inversion; global smoothness; linear transformation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Mapa de profundidade do relevo da bacia utilizada como modelo para a aplicação do método desenvolvido neste trabalho, com dimensões horizontais e vertical em km.	16
Figura 2: Mapas de anomalias gravimétricas (2a e 2c) e de ruído (2b). Em que o mapa 2c representa a anomalia gravimétrica gerada pelo modelo direto do relevo representado na Figura 1, sendo aquela acrescida do mapa de resíduos (2b), gerando o mapa 2a. Estes apresentam dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	17
Figura 3: Mapa de distribuição de densidade na camada superficial obtida pelo método de inversão com ruído, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em g/cm^3	18
Figura 4: Mapa de profundidade do relevo estimado pelo procedimento de inversão com ruído, com dimensões horizontais e vertical em km.	18
Figura 5: Mapa de anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseada camada superficial, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	19
Figura 6: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseada no relevo estimado, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	20
Figura 7: Mapa do resíduo obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pela camada superficial e pela bacia utilizada como modelo, com dimensões horizontais e vertical em km.	20
Figura 8: Mapa do resíduo obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pelo relevo estimado e pela bacia utilizada como modelo, de dimensões horizontais e vertical em km.	21
Figura 9: Mapa de distribuição de densidade na camada superficial obtida na iteração 49 do processo de inversão com ruído de dimensões horizontais em km e indicação vertical em g/cm^3	22
Figura 10: Mapa de profundidade do relevo estimado com o procedimento de inversão obtido na iteração 49 do processo de inversão com ruído de dimensões horizontais e vertical em km.	22
Figura 11: Mapa de anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseada camada superficial, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	23

Figura 12: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseada no relevo estimado, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	23
Figura 13: Mapa do resíduo obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pela camada superficial e pela bacia utilizada como modelo, com dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	24
Figura 14: Mapa do resíduo obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pelo relevo estimado e pela bacia utilizada como modelo obtido, com dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.	25
Figura 15: Gráficos indicando a tendência dos resultados com o decorrer das iterações para as funções objetivo (15a), ajuste (15b) e parâmetros (15c).	26

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 METODOLOGIA	4
2.1 REFERENCIAL TEÓRICO	4
2.1.1 Modelo Direto	4
2.1.2 Problema Inverso	5
2.1.3 Regularização	12
2.2 METODOLOGIA PROPOSTA	13
3 RESULTADOS	16
3.1 INVERSÃO UTILIZANDO DADOS SINTÉTICOS COM RUÍDO	16
4 CONCLUSÃO	27
REFERÊNCIAS	28

1 INTRODUÇÃO

A estimativa precisa da profundidade do embasamento de bacias sedimentares tem significativo impacto para o entendimento da formação e evolução geológica da bacia, para auxiliar o correto delineamento de trapas capazes de armazenar petróleo e para auxiliar a outros métodos geofísicos. A inversão gravimétrica pode, na maioria dos casos, recuperar com precisão o relevo do embasamento de bacias sedimentares considerando-se as profundidades e o contraste de densidade característicos da maioria das bacias. A gravimetria tem se destacado como um método eficiente e econômico (BOTT, 1960; CORBATÓ, 1965; TANNER, 1967; EI-BATROUKH e ZENTANI, 1980; KIENIEWICZ e LUYENDYK, 1986; BARBOSA et al., 1997; SILVA et al., 2006; MENEZES et al., 2007; GIMENEZ et al., 2009, por exemplo). No entanto, a crescente demanda de interpretações 3D e o uso de estabilizadores cada vez mais sofisticados (e.g. BARBOSA et al., 1999; SILVA et al., 2010; MARTINS et al. 2011) têm demandado tempos computacionais cada vez maiores. Isto ocorre porque a determinação da espessura de fontes gravimétricas é um problema não linear que é, em geral, resolvido iterativamente. A cada iteração, um sistema linear é resolvido uma ou diversas vezes (e.g. TANNER, 1967; BARBOSA et al., 1997; CHAKRAVARTHI e SUNDARARAJAN, 2007), fazendo com que o tempo computacional necessário para a solução do problema não linear seja muito maior que o tempo necessário para a solução de um problema linear.

Diversos procedimentos voltados à redução do tempo computacional necessário para a resolução de problemas inversos gravimétricos não lineares têm sido propostos e basicamente eles podem ser classificados em quatro grupos.

No primeiro, o relevo do embasamento é obtido através de um simples redimensionamento da anomalia gravimétrica, ou seja, a profundidade em cada ponto é obtida multiplicando-se a anomalia observada nesse ponto por um fator constante (LITINSKY, 1989, por exemplo).

No segundo grupo, o procedimento permanece iterativo, mas o tempo envolvido nas operações a cada iteração é reduzido. Bott (1960), por exemplo, adota um modelo interpretativo consistindo de prismas verticais 2D justapostos e estima a profundidade de cada prisma dividindo a anomalia diretamente acima dele por uma constante. O resíduo entre a anomalia observada e a anomalia gerada por esta estimativa é computado e o processo é repetido substituindo-se a anomalia observada pelo resíduo e somando-se o novo conjunto de

profundidades estimadas à estimativa anterior do relevo, até o resíduo se tornar desprezível. Este procedimento foi recentemente ampliado para o caso em que a densidade no pacote sedimentar varia monotonicamente com a profundidade (SILVA, 2014) e para o caso em que presumivelmente o relevo do embasamento apresente variações abruptas, em que portanto é incorporado o vínculo Variação Total (SANTOS, 2015).

No terceiro grupo o problema não linear é formulado através de uma aproximação linear e é resolvido em uma única iteração. Chavez e Garland (1985), por exemplo, estimam, a partir da anomalia gravimétrica, uma distribuição superficial de massa localizada a uma profundidade constante e conhecida e transformam essa distribuição de massa em um mapa de profundidades, dividindo-a pelo contraste de densidade, presumivelmente constante e conhecido. No método de Chavez e Garland (1985) o problema gravimétrico é 2D e o modelo interpretativo utiliza o modelo geométrico de fontes tipo *fita* dado por Nettleton (1976). Chavez e Garland (1985) resolveram a inversão gravimétrica através do método da Inversa Generalizada (JACKSON, 1972) reduzindo assim a instabilidade da solução.

No quarto grupo destacamos um método que trata da realização de uma transformação linear ao dado, transformação essa baseada no princípio da camada superficial, para processar grande quantidade de dados de campos potenciais (LEÃO E SILVA, 1989). Este procedimento executa a formulação de uma camada superficial por meio de um problema de mínimos quadrados indeterminado, solucionando, portanto uma inversão linear, a de estimar a distribuição da propriedade física. A solução, ou filtragem que se objetiva obter pela aplicação desse procedimento pode ser escrita sob medida para virtualmente qualquer filtro.

Propomos um método que utiliza uma formulação da inversão linear e o aplicamos para a solução de um problema cuja formulação é não linear e, portanto, resolvido iterativamente, e que incorpora formalmente o vínculo de Suavidade Global pelo regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKHONOV e ARSENIN, 1977). Executamos várias iterações dessa formulação linear de modo que a cada iteração é executada a estimação da distribuição de M valores de contraste de densidade de uma camada superficial plana horizontal confinada na projeção horizontal da bacia. Esta bacia por sua vez é discretizada por M prismas cujos parâmetros geométricos (dimensões e volume) são definidos e fixos em todas as iterações. Este conjunto de M valores de contraste de densidade estimados é atualizado pela soma com o conjunto da iteração anterior, e em seguida o valor acumulado de contraste de densidade aparente é transformado em valores de espessura de prismas, de mesmas dimensões horizontais e posição que os prismas da discretização da camada horizontal superficial, pelo produto de um fator de escala. Com este conjunto de M valores de

espessura de prismas a anomalia gravimétrica predita é calculada e o resíduo entre esta e a anomalia observada é atualizado, e utilizado na iteração seguinte. Assim, as estimativas das espessuras da bacia sedimentar são obtidas pela sucessão de dois procedimentos lineares, a obtenção via inversão linear da distribuição de contraste de densidade, e o produto desta por um escalar. Estes dois procedimentos lineares estão separados por uma operação de soma, realizada pela atualização do conjunto de valores de contraste de densidade aparente a cada iteração.

Destaco que o método proposto apresenta a vantagem de prescindir de aproximação inicial e não exige que sejam iguais o número de pontos de observações e a quantidade de parâmetros a serem estimados.

De certo modo nosso método se assemelha com os métodos do segundo e do terceiro grupos citados anteriormente, e ainda utiliza a abordagem descrita no quarto método.

A fim de verificar a efetividade do método proposto o aplicamos a um conjunto de dados gravimétricos sintéticos de uma bacia simulada cujo relevo do embasamento atinge profundidade relativamente grande para bacias sedimentares, além de apresentar uma feição não detectável pela simples inspeção visual da anomalia gravimétrica, e ainda assim o relevo estimado recupera em excelente aproximação o relevo verdadeiro.

2 METODOLOGIA

2.1 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1.1 Modelo Direto

Seja um pacote sedimentar discretizado por M prismas retangulares tridimensionais verticais horizontalmente justapostos, de dimensões horizontais dx e dy constantes, dispostos nas direções dos eixos ortogonais X e Y , cada um com uma espessura dz_j ($j = 1, \dots, M$) paralela ao eixo vertical Z , que é positivo no sentido do aumento de profundidade. O topo de cada j -ésimo prisma coincide com a topografia sobre a bacia e a base coincide com a profundidade do embasamento, em M pontos discretos. Presumindo constante o contraste de densidade $\Delta\rho_j$ entre o embasamento e o sedimento que preenche o j -ésimo prisma, a componente vertical da anomalia gravimétrica teórica g_i avaliada na i -ésima posição de observação (x_i, y_i, z_i) produzida pelos M prismas que compõe a discretização do pacote sedimentar é dada por:

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M f_i(p_j), \quad (1)$$

sendo $f_i(p_j) \equiv f_i(x_i, y_i, z_i)$ a função que quantifica a contribuição gravitacional na i -ésima posição de observação (x_i, y_i, z_i) produzida pelo j -ésimo prisma.

Em geral, o problema geofísico de quantificar a anomalia gravimétrica g_i produzida pelo j -ésimo prisma é definido pelo parâmetro p_j , que pode ser a espessura dz ou o contraste de densidade $\Delta\rho_j$. Portanto esta função $f_i(p_j)$ entre parâmetro p_j e observação g_i pode ser linear ou não linear, dependendo de qual daqueles parâmetros é empregado, mas em ambos os casos ela é definida por:

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma \Delta\rho_j \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z_i - z'_j}{\left[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2 \right]^{3/2}} dx'_j dy'_j dz'_j, \quad (2)$$

sendo γ a constante gravitacional de Newton, x_j , y_j e z_j as coordenadas do centro do j -ésimo prisma e os limites de integração: $x_1 = (x_i - x_j) - \frac{dx}{2}$; $x_2 = (x_i - x_j) + \frac{dx}{2}$; $y_1 = (y_i - y_j) - \frac{dy}{2}$; $y_2 = (y_i - y_j) + \frac{dy}{2}$; $z_1 = (z_i - z_j) - \frac{dz_j}{2}$; $z_2 = (z_i - z_j) + \frac{dz_j}{2}$.

Note que se o parâmetro p_j for o contraste de densidade $\Delta\rho_j$ a relação funcional entre parâmetro p_j e observação g_i será linear, por outro lado, se o parâmetro p_j for a espessura dz_j a relação funcional entre parâmetro p_j e observação g_i será não linear.

Plouff (1976) apresenta a solução analítica algorítmica desta equação, definida por:

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma\Delta\rho_j \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \mu_{klm} \left[z_m \arctan \frac{x_k y_l}{z_m R_{klm}} - x_k \log(R_{klm} + y_l) - y_l \log(R_{klm} + x_k) \right], \quad (3)$$

sendo $R_{klm} = \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}$ e $\mu_{klm} = (-1)^k (-1)^l (-1)^m$.

Com este mesmo modelo direto, obtém-se o vetor de N observações da anomalia de gravidade \mathbf{g} referente à bacia sedimentar simulada, e que é causada por um vetor \mathbf{p} de M parâmetros, repetindo o procedimento descrito na equação 1 para cada elemento g_i que compõe o vetor \mathbf{g} .

2.1.2 Problema Inverso

Considere dois vetores \mathbf{g}^o e \mathbf{g}^p , definidos por dois conjuntos de N dados, observados e preditos, respectivamente, ambos avaliados nas mesmas posições x_i, y_i e z_i ($i = 1, \dots, N$). Considere também o vetor \mathbf{p} contendo M parâmetros. Podemos obter os dados preditos \mathbf{g}^p em função dos parâmetros \mathbf{p} por:

$$\mathbf{g}^p = \mathbf{F}\mathbf{p}, \quad (4)$$

sendo \mathbf{F} uma matriz $N \times M$ dimensional de transformação de \mathbf{p} em \mathbf{g}^p , e cada ij -ésimo elemento desta matriz contém a relação do j -ésimo parâmetro p_j com a i -ésima observação g_i , que é dada pela equação 2.

A inversão consiste em encontrar o vetor de parâmetros \mathbf{p} que produza os dados preditos \mathbf{g}^p mais próximos possíveis dos dados observados \mathbf{g}^o .

O vetor de resíduo \mathbf{r} entre dados observados e preditos é dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}^o - \mathbf{g}^p. \quad (5)$$

Em geral, para quantificar a distância entre os vetores \mathbf{g}^o e \mathbf{g}^p é utilizado o quadrado da norma quadrática (ou Norma Euclidiana) do vetor de resíduo \mathbf{r} :

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N [g_i^o - g_i^p]^2, \quad (6)$$

em que $\|\cdot\|_2$ denota Norma Euclidiana. A medida $\|\mathbf{r}\|_2^2$ também é conhecida como função do ajuste, e é denotada por $\phi(\mathbf{p})$. Efetuando matricialmente o quadrado do vetor de resíduo \mathbf{r} , temos:

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_N] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}. \quad (7)$$

em que o sobrescrito T indica a operação transposição do vetor.

Então, aplicando em 7 as equações 5 e 6, temos:

$$\phi(\mathbf{p}) = [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}]^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}]. \quad (8)$$

Note que a função ajuste $\phi(\mathbf{p})$ quantifica a distância entre os dados observados \mathbf{g}^o e os dados preditos \mathbf{g}^p para um determinado vetor de parâmetros \mathbf{p} . Por outro lado, a inversão trata justamente de encontrar o vetor \mathbf{p} . Uma forma de estimar este vetor \mathbf{p} é pela minimização da função do ajuste $\phi(\mathbf{p})$, ou em outras palavras, pela exigência de que seja mínima a diferença entre os dados observados \mathbf{g}^o e preditos \mathbf{g}^p produzido pelo vetor \mathbf{p} . Como no procedimento típico de minimização de funções, de encontrar a primeira derivada igual à zero, esta minimização pode ser realizada exigindo-se igualdade do vetor gradiente da função ajuste ($\nabla\phi(\mathbf{p})$) ao vetor nulo,

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\phi(\mathbf{p})}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi(\mathbf{p})}{\partial p_M} \end{bmatrix} = 0, \quad (9)$$

sendo o i -ésimo elemento deste vetor gradiente a derivada de $\phi(\mathbf{p})$ em relação ao i -ésimo parâmetro p_i , escrito como:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \{[\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}]^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}]\}. \quad (10)$$

Efetuada esta derivada temos:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} = -2 \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_i} [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}]. \quad (11)$$

Substituindo (11) em (9), tem-se:

$$\nabla \phi(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_1} [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}] \\ -2 \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_2} [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}] \\ \vdots \\ -2 \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_m} [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}] \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}^T}{\partial p_m} \end{bmatrix} [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}], \quad (12)$$

e portanto:

$$\nabla \phi(\mathbf{p}) = -2\mathbf{A}^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{F}\mathbf{p}], \quad (13)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}}{\partial p_1} & \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}\mathbf{p}}{\partial p_M} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

ou, como $\mathbf{F}\mathbf{p}$ é um vetor N -dimensional contendo N dados calculados $g_i^p(\mathbf{p})$ em N pontos de observação ($i = 1, \dots, N$), podemos escrever \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^p(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \frac{\partial g_1^p(\mathbf{p})}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial g_1^p(\mathbf{p})}{\partial p_M} \\ \frac{\partial g_2^p(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \frac{\partial g_2^p(\mathbf{p})}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial g_2^p(\mathbf{p})}{\partial p_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_N^p(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \frac{\partial g_N^p(\mathbf{p})}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial g_N^p(\mathbf{p})}{\partial p_M} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

sendo \mathbf{A} a matriz chamada de Sensibilidade e cada um de seus ij -ésimos elementos definidos por:

$$A_{ij} = \frac{\partial g_i^p(\mathbf{p})}{\partial p_j}, i = 1, \dots, M \text{ e } j = 1, \dots, N. \quad (16)$$

A relação funcional entre o vetor de parâmetros \mathbf{p} e a observação \mathbf{g} pode ser descrita como uma relação linear ou não-linear, e igualmente, a inversão pode ser linear ou não linear, explicitamente quando o resultado da derivada parcial da função $g_i^p(\mathbf{p})$ em relação ao j -ésimo parâmetro p_j (equação 16) for ou não dependente do parâmetro p_j . Se o resultado desta derivada parcial for igual a uma constante, então tanto a relação funcional entre parâmetros e observação e a inversão são lineares, por outro lado, se este resultado for uma função dos parâmetros então tanto a relação funcional quanto a inversão são não lineares.

Problema Inverso Linear

Se a função que relaciona o j -ésimo elemento (p_j) do vetor dos parâmetros \mathbf{p} ao i -ésimo dado predito g_i^p for linear, então:

$$\frac{\partial g_i^p(\mathbf{p})}{\partial p_j} = A_{ij} = \text{Constante}, \quad (17)$$

e o vetor de dados preditos \mathbf{g}^p pode ser obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{g}^p(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p} \quad (18)$$

Substituindo (18) em (13):

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) = -2\mathbf{A}^T[\mathbf{g}^o - \mathbf{A}\mathbf{p}] \quad (19)$$

Para minimizar a função ajuste, impõe-se $\nabla\phi(\mathbf{p}) = 0$. Assim, resolvendo a equação 19, temos:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{g}^o \quad (20)$$

Logo, o estimador do vetor de parâmetros \mathbf{p} é obtido por:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{g}^o \quad (21)$$

Problema Inverso Não-Linear

Para o caso do gradiente da função em relação a um j -ésimo parâmetro não é possível escrever em uma forma fechada o estimador dos parâmetros como na equação 21. Assim, o cálculo para minimização da função do ajuste $\phi(\mathbf{p})$ em geral é um procedimento algorítmico e iterativo, em que na k -ésima iteração o vetor de parâmetros \mathbf{p}_k é obtido somando-se um vetor de correção $\Delta\mathbf{p}_k$, ao vetor de parâmetros da iteração anterior \mathbf{p}_{k-1} ,

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \Delta\mathbf{p}_k, \quad (22)$$

sendo utilizado na primeira iteração ($k = 1$) \mathbf{p}_0 como aproximação inicial.

Há vários métodos para calcular a correção $\Delta\mathbf{p}_k$, dentre os quais se destacam os métodos pertencentes a classe dos Métodos do Gradiente Aceitável. Dentre estes, um método muito utilizado é o método de Gauss-Newton aplicando-se a estratégia de Marquardt (1963). Primeiramente a função a ser minimizada é expandida em série de Taylor até a segunda ordem em torno da aproximação inicial \mathbf{p}_{k-1}

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{p}_k) &= \phi(\mathbf{p}_{k-1} + \Delta\mathbf{p}_k) \\ &\approx \phi(\mathbf{p}_{k-1}) + \nabla\phi(\mathbf{p}_{k-1})^T \Delta\mathbf{p}_k + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T \nabla^2\phi(\mathbf{p}_{k-1}) \Delta\mathbf{p}_k. \end{aligned} \quad (23)$$

Para encontrarmos o mínimo desta função $\psi(\mathbf{p}_k)$, temos:

$$\begin{aligned} \nabla\psi(\mathbf{p}_k) &= \nabla \left[\phi(\mathbf{p}_{k-1}) + \nabla\phi(\mathbf{p}_{k-1})^T \Delta\mathbf{p}_k + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T \nabla^2\phi(\mathbf{p}_{k-1}) \Delta\mathbf{p}_k \right] \\ &= \nabla\phi(\mathbf{p}_{k-1}) + \nabla^2\phi(\mathbf{p}_{k-1}) \Delta\mathbf{p}_k = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

e logo, temos a equação normal:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{p}_{k-1}) \Delta\mathbf{p}_k = -\nabla\phi(\mathbf{p}_{k-1}). \quad (25)$$

em que $\nabla\phi(\mathbf{p}_{k-1})$ é o chamado vetor Jacobiano ($\mathbf{J}(\mathbf{p}_{k-1})$), e $\nabla^2\phi(\mathbf{p}_{k-1})$ é a matriz Hessiana ($\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$).

A partir da equação 25, podemos calcular o vetor correção $\Delta\mathbf{p}_k$ pela equação:

$$\Delta\mathbf{p}_k = -\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{p}_{k-1}). \quad (26)$$

Explicitando ij -ésimo elemento da Matriz Hessiana ($H_{ij}(\mathbf{p}_{k-1})$), temos:

$$\begin{aligned}
 H_{ij}(\mathbf{p}_{k-1}) &= \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-2 \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_i} [\mathbf{g}^o - \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})] \right) \\
 &= \left(-2 \frac{\partial^2 \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_j \partial p_i} [\mathbf{g}^o - \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})] \right) \\
 &\quad + \left(2 \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_j} \right).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Por sua vez, segundo o proposto pelo método comumente chamado na literatura de método de Gaus-Newton, desde que a Matriz Hessiana ($\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$) seja positivo definida, pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right) \approx 2 \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_j}, \tag{28}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1}) \approx 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_1} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_1} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_M} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_M} \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_M} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

ou, usando a equação 6,

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1}) \approx 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F} \mathbf{p}_{k-1}^T}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F} \mathbf{p}_{k-1}^T}{\partial p_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F} \mathbf{p}_{k-1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F} \mathbf{p}_{k-1}}{\partial p_M} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

ou ainda

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1}) \approx 2 \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1}. \tag{31}$$

Explicitando o i -ésimo elemento do vetor Jacobiano ($J_i(\mathbf{p}_{k-1})$):

$$J_i(\mathbf{p}_{k-1}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{p}_{k-1})}{\partial p_i} = 2 \frac{\partial \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})^T}{\partial p_i} [\mathbf{g}^o - \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})]. \quad (32)$$

Assim, o vetor Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{p}_{k-1})$, é dado por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}_{k-1}) = 2\mathbf{A}_{k-1}^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}], \quad (33)$$

sendo $\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{g}^p(\mathbf{p}_{k-1})$.

Com as equações 26, 31 e 33 pode-se calcular o vetor de correções $\Delta\mathbf{p}_k$ por:

$$\Delta\mathbf{p}_k = -[\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1}]^{-1} \mathbf{A}_{k-1}^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}]. \quad (34)$$

Comparando as equações 21 e 34 nota-se que a segunda se reduz à solução da primeira quando a relação entre parâmetros e observação é linear, por não ser iterativa, sendo que em cada iteração é gerado a um fator de correção para o valor dos parâmetros.

Por outro lado, um problema típico de estimações de parâmetros em geofísica é que não há garantia de que a matriz Hessiana ($\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$) seja sempre positiva definida, levando a dificuldades de localização do mínimo de $\psi(\mathbf{p}_k)$ (Marquardt, 1963). A estratégia de Marquardt (1963) consiste em tornar a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$ positiva definida em todas as iterações, tornando-a fortemente diagonal-dominante. A matriz Hessiana modificada pela estratégia de Marquardt $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{p}_{k-1})$ é dada por:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{p}_{k-1}) = \mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1}) + \lambda_m \mathbf{D}_{k-1}, \quad (35)$$

sendo \mathbf{D}_{k-1} uma matriz diagonal com elementos diferentes de zero iguais aos valores absolutos da diagonal principal da matriz Hessiana ($\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$) e λ_m é o parâmetro de Marquardt da m -ésima subiteração do loop de Marquardt capaz de tornar $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{p}_{k-1})$ fortemente diagonal-dominante e conduzir $\psi(\mathbf{p}_k)$ a um valor menor que $\psi(\mathbf{p}_{k-1})$. Assim, efetivamente, para o cálculo do vetor correção $\Delta\mathbf{p}_k$ (equação 26) pela estratégia de Marquardt (1963), a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{p}_{k-1})$ é substituída pela matriz Hessiana modificada $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{p}_{k-1})$, ou seja substituindo na equação 26 as equações 33 e 35.

O algoritmo de inversão é interrompido quando não há mais significativa variação da função $\psi(\mathbf{p}_k)$. Na prática a convergência ocorre quando, em uma k -ésima iteração, a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left| \frac{\psi(\mathbf{p}_k) - \psi(\mathbf{p}_{k-1})}{\psi(\mathbf{p}_{k-1})} \right| \leq 0.01. \quad (36)$$

2.1.3 Regularização

As equações para os problemas linear e não-linear (equações 21 e 34) são sistemas lineares em que as matrizes a serem invertidas são quadradas. Esses sistemas para possuírem resultados únicos a matriz quadrada a ser invertida deve ter posto completo, ou seja, as equações devem ser linearmente independentes, resultando em um determinante não nulo. Entretanto nos problemas geofísicos o resultado mais provável é que o determinante seja próximo de zero, indicando que o problema de inversão geofísica é mal-posto (HADAMARD, 1902).

Para contornar esse problema são acrescentados nos algoritmos matemáticos restrições à demanda de resultados possíveis que são gerados no processo, introduzidas por meio de informações a priori, as quais são de natureza matemática e/ou geológica (TIKHONOV e ARSENIN, 1977).

Regularizador de Suavidade - Tikhonov de Ordem 1

Um regularizador muito utilizado é o chamado regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKHONOV e ARSENIN, 1977), este funcional impõe ao sistema que os parâmetros espacialmente adjacentes tenham valores próximos entre si e, portanto, que presumivelmente não há variações abruptas entre eles.

Matematicamente, este regularizador é descrito como o quadrado de um vetor \mathbf{v} que contém a informação das diferenças entre os parâmetros espacialmente adjacentes, da seguinte forma:

$$\phi^S(\mathbf{p}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (37)$$

Especificamente, o vetor \mathbf{v} pode ser descrito como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{p}, \quad (38)$$

em que \mathbf{R} é uma matriz $L \times M$ representando o operador diferencial discreto de primeira ordem ao longo das direções horizontais x e y , e L é o número de pares de parâmetros adjacentes. Uma matriz de diferenças finitas para a derivada espacial dos parâmetros.

Substituindo (38) em (37):

$$\phi^S(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}, \quad (39)$$

em que o Jacobiano (\mathbf{J}^S) e a Hessiana (\mathbf{H}^S) de ϕ^S são respectivamente:

$$\nabla \phi^S(\mathbf{p}) = \mathbf{J}^S = \nabla[\mathbf{p}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}] = 2\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}, \quad (40)$$

e

$$\nabla^2 \phi^S(\mathbf{p}) = \mathbf{H}^S = \nabla[2\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}] = 2\mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (41)$$

Adicionando este regularizador às equações da inversão linear e não-linear, estas equações são reescritas, respectivamente, por:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g}^o, \quad (42)$$

e

$$\Delta \mathbf{p}_k = -[\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} + \mu \mathbf{R}^T \mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{A}_{k-1}^T [\mathbf{g}^o - \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}] + \mu \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}], \quad (43)$$

em que μ é o parâmetro de regularização, um escalar positivo que representa o peso associado ao funcional $\phi^S(\mathbf{p})$.

2.2 METODOLOGIA PROPOSTA

Como já salientado pela comparação das equações 21 e 34, a solução para o problema linear pode ser descrita como um caso restrito e particular do problema não-linear, no entanto vale ressaltar que: i) no caso da inversão linear o vetor de parâmetros \mathbf{p} é determinado uma única vez, enquanto que para a inversão não linear o vetor de correções $\Delta \mathbf{p}$ é determinado a cada iteração para a atualização do vetor de parâmetros \mathbf{p} ; ii) no caso da inversão linear a matriz sensibilidade é avaliada uma única vez, enquanto que para a inversão não linear a matriz sensibilidade é avaliada a cada iteração.

Propomos um método que se vale da não dependência iterativa da matriz sensibilidade quando a formulação da inversão é linear, e o aplicamos para a solução de um problema cuja formulação é não linear, e portanto resolvido iterativamente, o problema de estimar as profundidades do relevo do embasamento de bacias sedimentares em M pontos. Executamos a cada iteração a estimação da distribuição de M valores de contraste de densidade estimada

($\Delta\tilde{\rho}_j$, $j = 1, \dots, M$) de uma camada superficial plana horizontal confinada na projeção horizontal da bacia, posicionada na profundidade h , que é indicada pelo interprete, e discretizada por M prismas cujos parâmetros geométricos são definidos e fixos em todas as iterações. Especificamente cada um destes M prismas da camada superficial tem dimensões horizontais dx e dy e espessura dz , que definem um volume elementar constante $V = dxdydz$, para cada prisma. Assim, a matriz sensibilidade utilizada para estimar a distribuição de contraste de densidade $\Delta\tilde{\rho}_j$ destes M prismas é sempre a mesma, mesmo que apliquemos uma formulação iterativa. Estes contrastes de densidade $\Delta\tilde{\rho}_j$ são estimados a cada iteração do seguinte modo:

- i) na primeira iteração ($k = 1$) o vetor \mathbf{p} contendo os M valores de contrastes de densidade $\Delta\tilde{\rho}_j$ da camada superficial é determinado pela equação 41, a partir da anomalia gravimétrica observada \mathbf{g}^o ;
- ii) da segunda iteração em diante ($k \geq 2$), um vetor $\Delta\mathbf{p}_k$ contendo os M valores de contrastes de densidade $\Delta\tilde{\rho}_j$ é determinado pela equação 42, a partir do resíduo \mathbf{r} (equação 5) entre a anomalia observada e a predita ao final daquela iteração, e finalmente o vetor de M valores de contrastes de densidade da camada superficial é atualizado ($\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \Delta\mathbf{p}_k$).

Note que, com o volume V e o contraste de densidade $\Delta\tilde{\rho}_j$ do j -ésimo prisma atualizado na k -ésima iteração, podemos determinar a massa equivalente \tilde{m}_j deste j -ésimo prisma pelo produto $\tilde{m}_j = \Delta\tilde{\rho}_j V$.

Simultaneamente, discretizamos também a bacia em M prismas de dimensões horizontais dx e dy e coordenadas dos centros horizontais dos prismas x_j e y_j ($j = 1, \dots, M$), ou seja, com os mesmos parâmetros geométricos definidos para os M prismas da camada superficial, exceto que, na discretização da bacia, as espessuras dos M prismas ($d\tilde{z}_j$) são diferentes entre si para alcançar do topo à base da bacia. Lembramos que o topo da bacia é fixo e coincide com a topografia, e que a base coincide com o relevo do embasamento estimado na k -ésima iteração. Esta diferença nas espessuras dos dois modelos significa que o volume do j -ésimo prisma da discretização da bacia V_j é diferente do volume dos prismas da camada superficial V . Contudo, a cada iteração, presumimos que a massa atualizada \tilde{m}_j do j -ésimo prisma da camada superficial é equivalente à massa do j -ésimo prisma do modelo interpretativo da bacia, a fim de determinar a espessura $d\tilde{z}_j$ deste j -ésimo prisma da bacia.

Assim, presumindo conhecido à priori o contraste de densidade $\Delta\rho_c$ do pacote sedimentar da bacia, para o j -ésimo prisma, escrevemos a igualdade:

$$\Delta\tilde{\rho}_j V = \Delta\rho_c V_j, \quad (43)$$

que pode ainda ser reescrita por:

$$\Delta\tilde{\rho}_j dx dy dz = \Delta\rho_c dx dy d\tilde{z}_j, \quad (44)$$

que finalmente leva à:

$$d\tilde{z}_j = \frac{\Delta\tilde{\rho}_j dz}{\Delta\rho_c}. \quad (45)$$

Finalmente, com as M espessuras $d\tilde{z}_j$ da bacia atualizadas na k -ésima iteração, calculamos a anomalia predita \mathbf{g}_k^p usando a equação 4 (sendo as M espessuras $d\tilde{z}_j$ os elementos do vetor \mathbf{p}).

O algoritmo de inversão é interrompido na k -ésima iteração em que a inequação 35 é satisfeita.

ruído gaussiano pseudoaleatório, mostrado na Figura 2b, com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal.

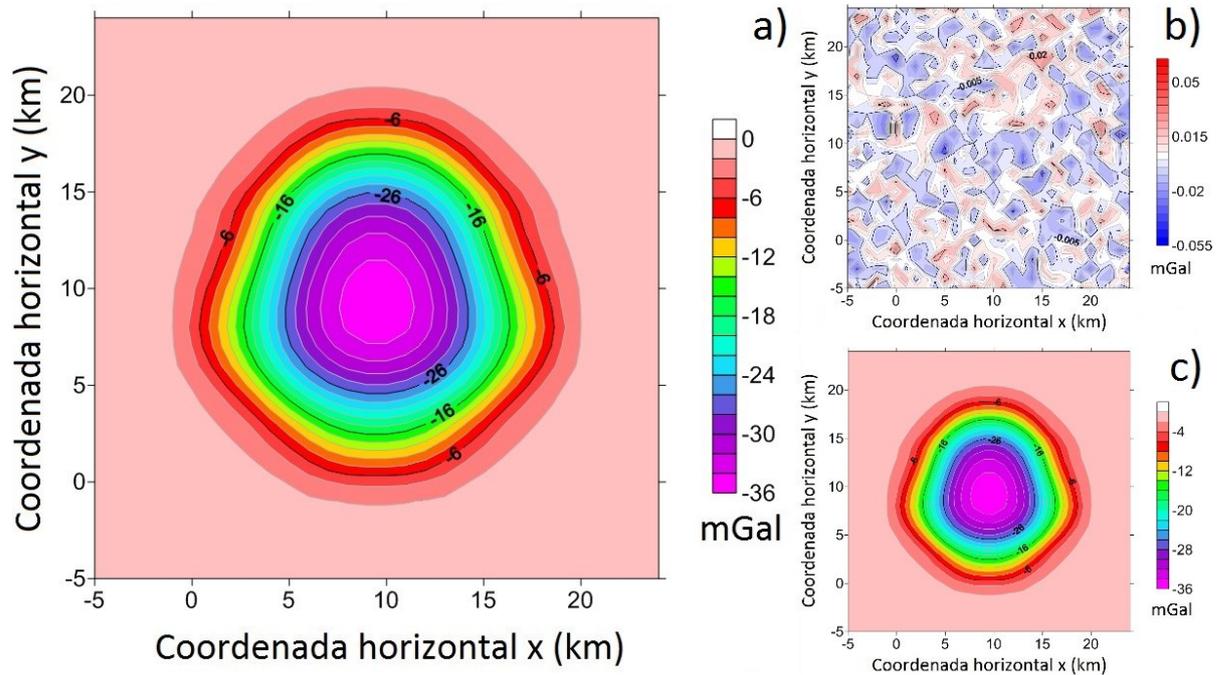


Figura 2: Mapas de anomalias gravimétricas (2a e 2c) e de ruído (2b). Em que o mapa 2c representa a anomalia gravimétrica gerada pelo modelo direto do relevo representado na Figura 1, sendo aquela acrescida do mapa de resíduos (2b), gerando o mapa 2a. Estes apresentam dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

Aplicamos o procedimento de inversão proposto à anomalia gravimétrica contaminada com ruído (Figura 2a) do modelo simulado (Figura 1) utilizando o parâmetro de regularização do vínculo de suavidade global $\mu = 0,0001$. Discretizamos a camada superficial para estimarmos a distribuição de contraste de densidade aparente e as correspondentes espessuras do pacote sedimentar da bacia sintética em 1600 prismas verticais justapostos com base horizontal quadrada de 1 km de lado, dispostos em uma malha quadrada de 40×40 prismas.

A Figura 3 mostra a distribuição de contraste de densidade aparente da camada superficial estimada na primeira iteração do procedimento de inversão.

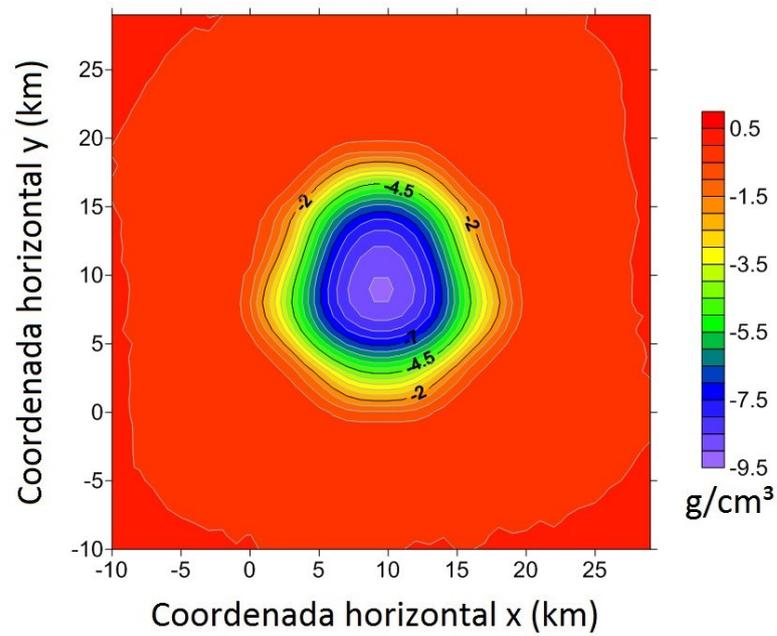


Figura 3: Mapa de distribuição de densidade na camada superficial obtida pelo método de inversão com ruído, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em g/cm^3 .

A Figura 4 mostra o relevo do embasamento estimado na primeira iteração do procedimento de inversão obtido pela conversão de contraste de densidade aparente estimado (Figura 3) em espessura do pacote sedimentar.

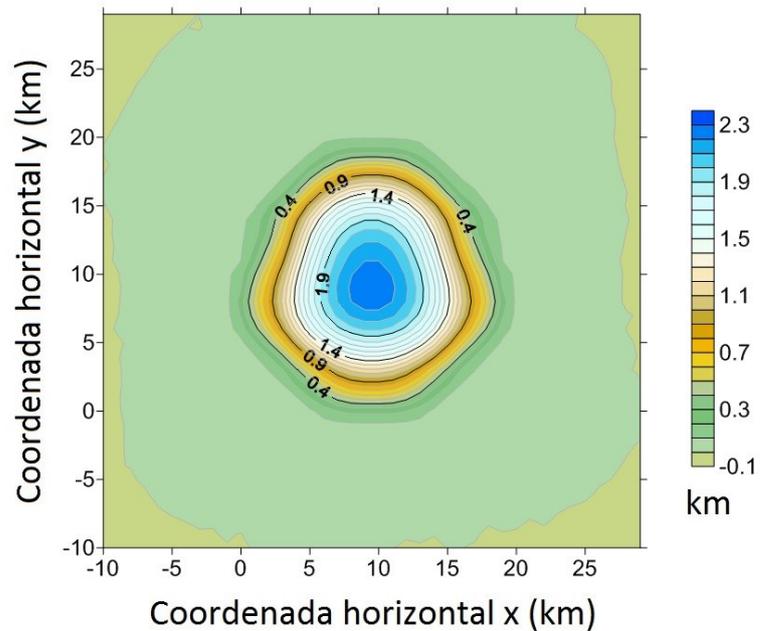


Figura 4: Mapa de profundidade do relevo estimado pelo procedimento de inversão com ruído, com dimensões horizontais e vertical em km.

Note que na primeira iteração, o relevo estimado não se parece com o a forma do relevo verdadeiro, nem atinge a profundidade deste, sendo praticamente a anomalia gravimétrica (mGal) redesenhada na escala de profundidade (km).

As anomalias previstas calculadas utilizando-se a distribuição de contraste de densidade da camada superficial estimada na primeira iteração (Figura 3) e as correspondentes espessuras do pacote sedimentar (Figura 4) são mostradas nas Figuras 5 e 6 respectivamente.

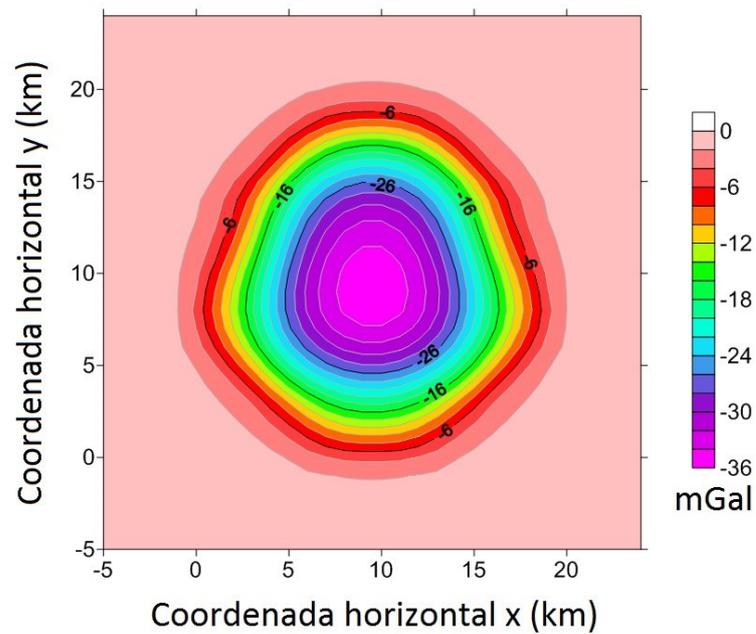


Figura 5: Mapa de anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseada camada superficial, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

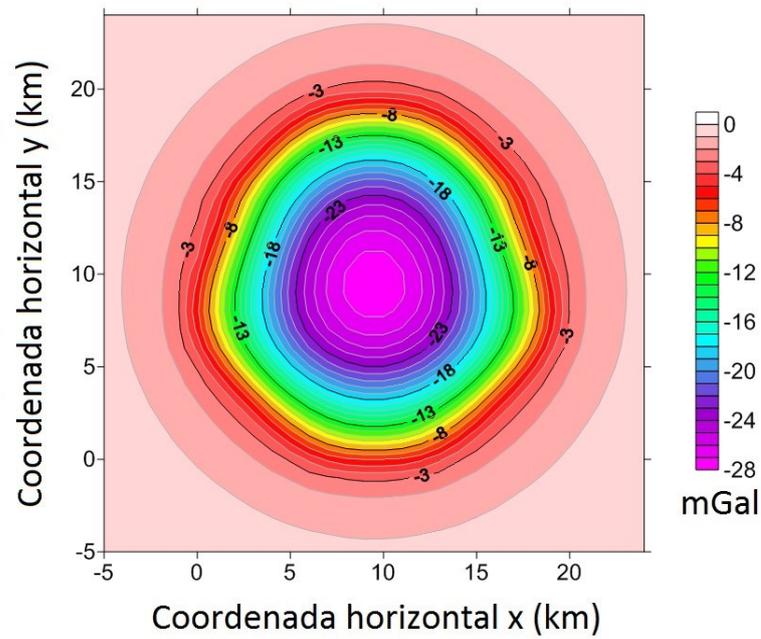


Figura 6: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseada no relevo estimado, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

Os resíduos entre as anomalias previstas (Figuras 5 e 6) e a anomalia gravimétrica verdadeira contaminada com ruído (Figura 2a) são mostrados nas Figuras 7 e 8, respectivamente.

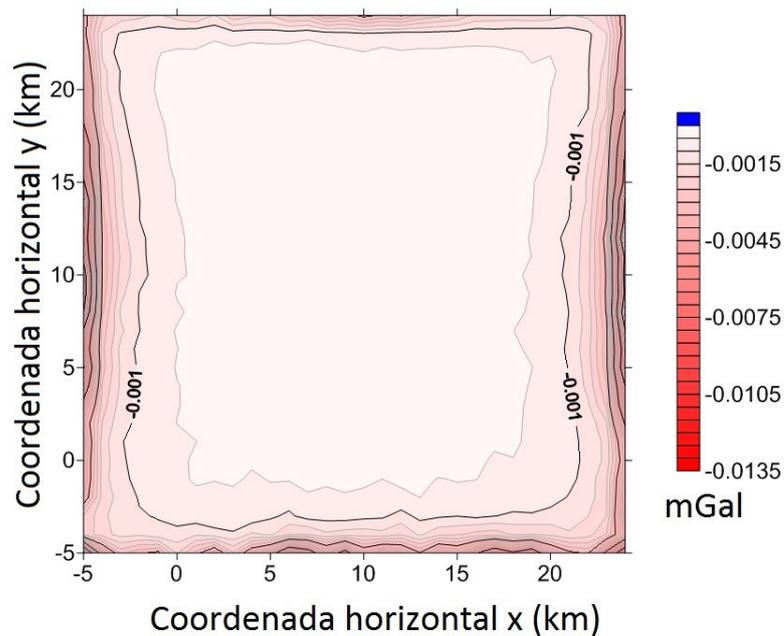


Figura 7: Mapa do resíduo obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pela camada superficial e pela bacia utilizada como modelo, com dimensões horizontais e vertical em km.

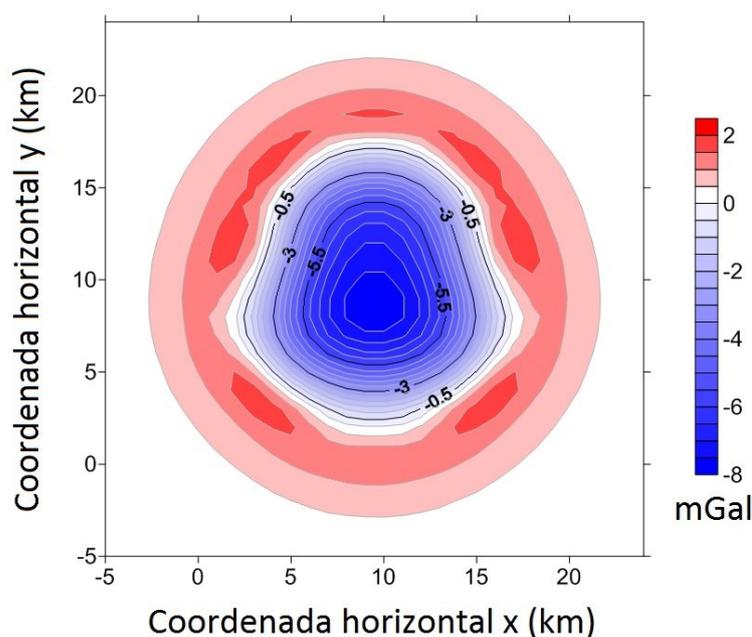


Figura 8: Mapa do resíduo obtido na iteração inicial do processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pelo relevo estimado e pela bacia utilizada como modelo, de dimensões horizontais e vertical em km.

Note que o resíduo da anomalia gravimétrica predita pelo modelo da camada superficial é virtualmente igual a zero, como esperado e predito pela técnica de camada superficial (Emílie, 1973, Silva 2001). Por outro lado, note que o resíduo da anomalia gravimétrica predita pelo modelo de espessura do pacote sedimentar obtido nesta iteração tem amplitude relativamente alta. Este resíduo será utilizado na iteração seguinte pelo algoritmo de inversão para produzir o vetor de correções do parâmetro estimado da próxima iteração. O procedimento de estimativa das espessuras do pacote sedimentar continuará ocorrendo nas próximas iterações até que o resíduo da anomalia gravimétrica predita pelo modelo de espessura do pacote sedimentar seja virtualmente igual a zero, o que atende a exigência do critério de parada estabelecido.

Para atender ao critério de parada, o procedimento de inversão aplicado utilizou 49 iterações. A Figura 9 mostra o resultado da distribuição de contraste de densidade aparente estimado para a camada superficial na última iteração do procedimento de inversão. A Figura 10 mostra o relevo do embasamento estimado na última iteração obtido pela conversão de contraste de densidade aparente estimado (Figura 9) em espessura do pacote sedimentar.

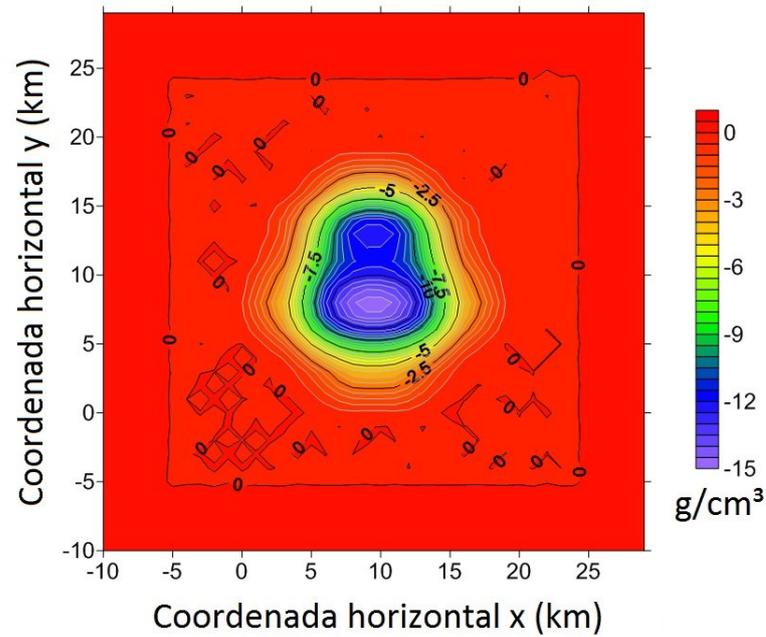


Figura 9: Mapa de distribuição de densidade na camada superficial obtida na iteração 49 do processo de inversão com ruído de dimensões horizontais em km e indicação vertical em g/cm^3 .

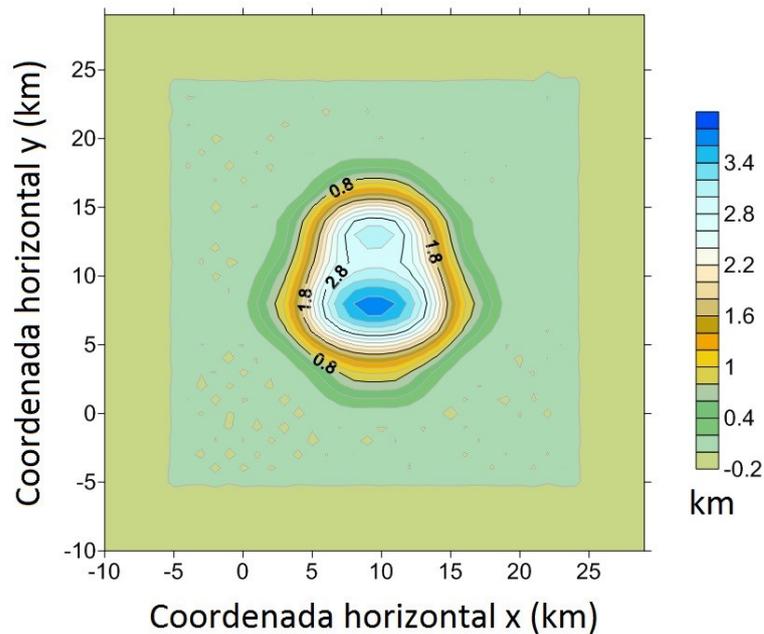


Figura 10: Mapa de profundidade do relevo estimado com o procedimento de inversão obtido na iteração 49 do processo de inversão com ruído de dimensões horizontais e vertical em km.

Note que o relevo estimado na última iteração é muito semelhante ao verdadeiro. No entanto, embora tenhamos mostrado o mapa da distribuição de contraste de densidade aparente estimada na última iteração, este não guarda significado físico factível com a geologia do modelo.

As anomalias previstas calculadas utilizando-se a distribuição de contraste de densidade da camada superficial estimada na última iteração (Figura 9) e as correspondentes espessuras do pacote sedimentar (Figura 10) são mostradas nas Figuras 11 e 12 respectivamente.

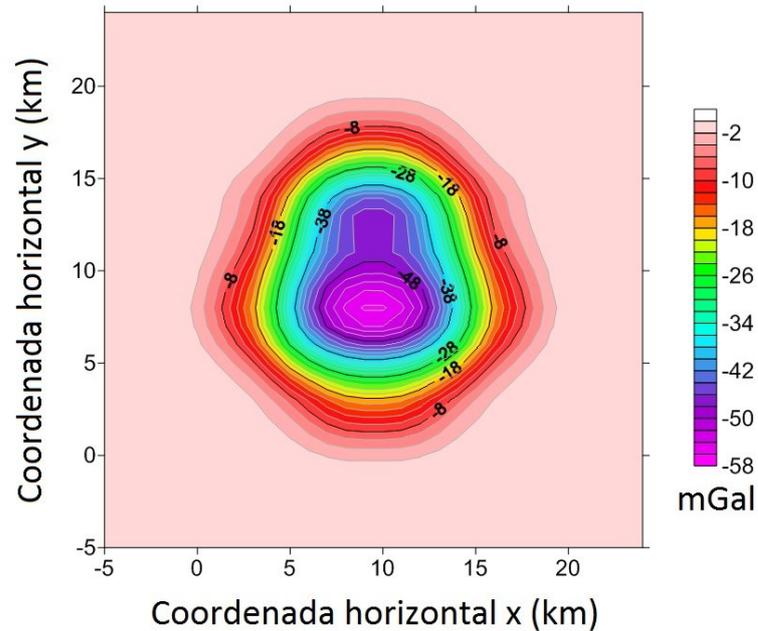


Figura 11: Mapa de anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseada camada superficial, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

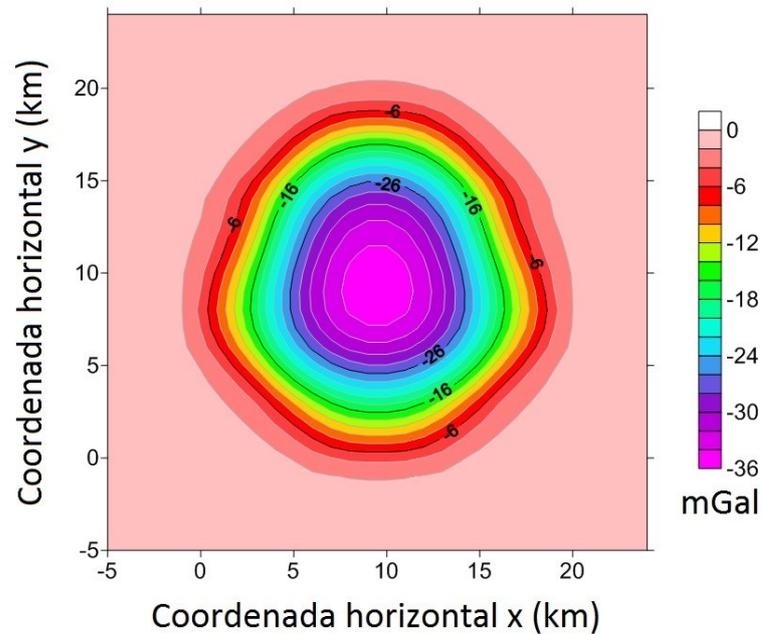


Figura 12: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseada no relevo estimado, de dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

Os resíduos entre as anomalias previstas da última iteração (Figuras 11 e 12) e a anomalia gravimétrica verdadeira contaminada com ruído (Figura 2a) são mostrados nas Figuras 13 e 14, respectivamente.

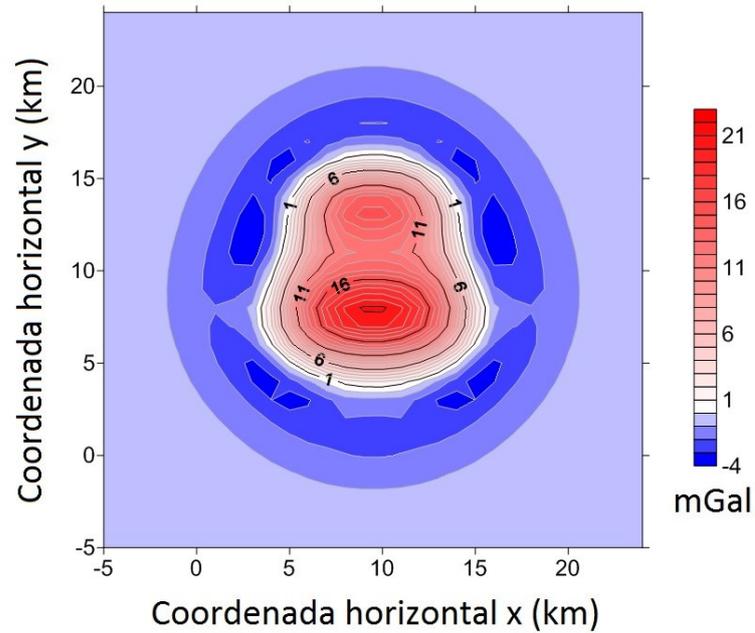


Figura 13: Mapa do resíduo obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pela camada superficial e pela bacia utilizada como modelo, com dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

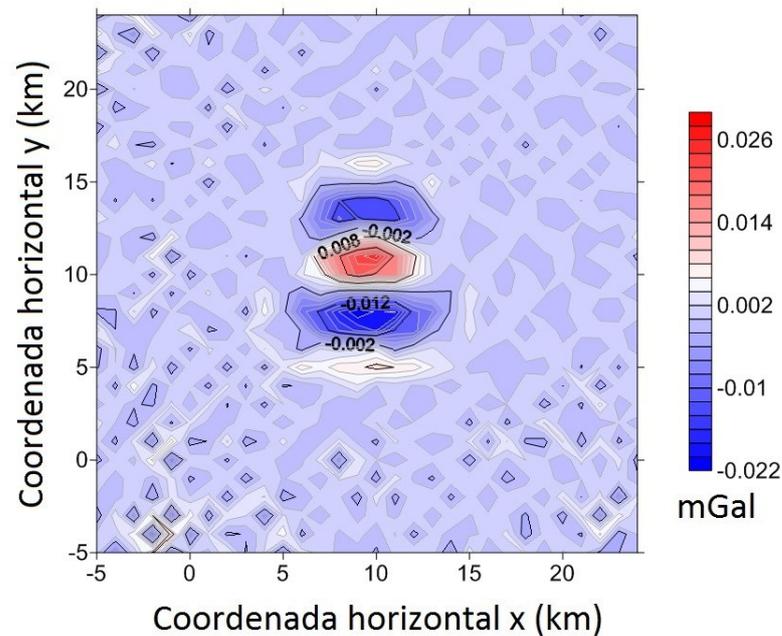


Figura 14: Mapa do resíduo obtido na iteração 49 pelo processo de inversão com ruído baseado na diferença entre as anomalias gravimétricas produzidas pelo relevo estimado e pela bacia utilizada como modelo obtido, com dimensões horizontais em km e indicação vertical em mGal.

Note que o resíduo da anomalia gravimétrica predita pelo modelo de espessura do pacote sedimentar obtida na última iteração é virtualmente zero, sendo de amplitude inferior à metade do ruído adicionado.

A Figura 15c mostra os valores, a cada iteração, do funcional dos parâmetros, que é definida pela Norma Euclidiana do funcional regularizador (definido na equação 36) de cada iteração, dividido pelo número de pares de parâmetros. A Figura 15b mostra os valores, a cada iteração, do funcional do resíduo, que é definida pela Norma Euclidiana do Resíduo (equação 06) dividido pelo número de observações. A Figura 15a mostra os valores, a cada iteração, da função objetivo, que é dada pela soma do funcional do resíduo com o funcional dos parâmetros. (Os três funcionais (Figuras 15a, b e c) foram avaliadas nas 49 iterações).

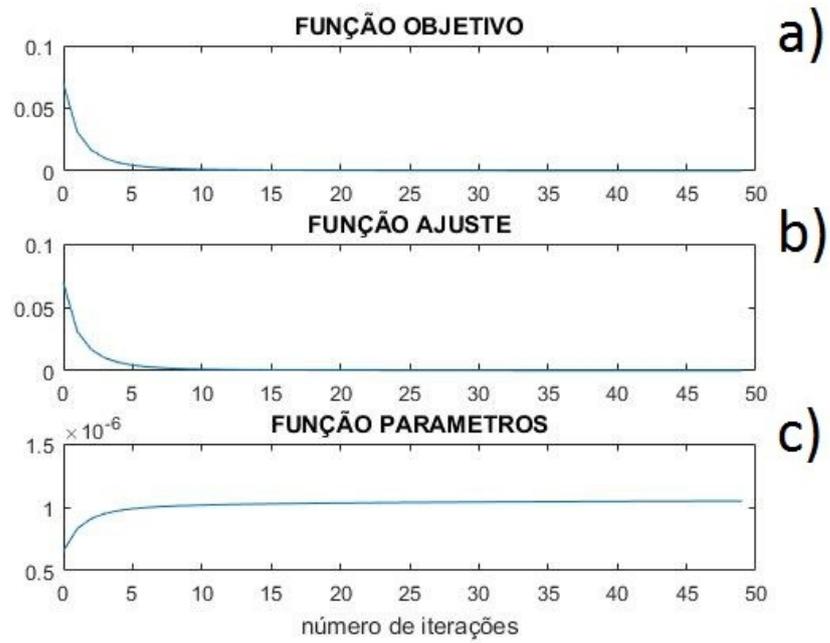


Figura 15: Gráficos indicando a tendência dos resultados com o decorrer das iterações para as funções objetivo (15a), ajuste (15b) e parâmetros (15c).

4. CONCLUSÃO

Propomos um método de inversão não linear para estimar o relevo do embasamento de bacias sedimentares que utiliza iterativamente procedimentos lineares e pouco custosos computacionalmente. O método desenvolvido incorpora formalmente, a cada iteração, a informação geológica a priori de que o relevo estimado é globalmente suave. Para deduzirmos a formulação deste novo método propostos, apresentamos também toda a dedução da inversão linear, da inverso não linear clássica, e do regularizador.

Realizamos testes sintéticos simulando um relevo do embasamento contendo ao menos um elemento de complexidade e evidenciamos a eficácia do método proposto para a recuperação de relevo simulado mesmo quando este atinge grandes profundidades e apresenta feição ocultada na anomalia.

Destacamos a vantagem quanto à eficiência que o método proposto apresenta por ser computacionalmente menos dispendioso que a inversão não linear clássica. Esta eficiência pode ser a diferença entre a possibilidade e a impossibilidade computacional de se proceder à inversão gravimétrica em levantamentos com grande volume de dados.

Como possibilidades futuras do trabalho, sugerimos a verificação da eficiência pela quantificação da economia de tempo computacional necessário quando comparados o método proposto, a inversão gravimétrica não linear clássica, e outros métodos para a estimação tridimensional do relevo do embasamento de bacias sedimentares.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C. E MEDEIROS, W. E., 1997, Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depths: *Geophysics*, 62, 1745-1757.
- BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C, E MEDEIROS, W. E., 1999, Gravity inversion of a discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth: *Geophysics*, v. 64, p. 1429-1438.
- BOTT, M. H. P., 1960, The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins: *Geophys. J. Royal Astronomical Society*, v 3, p 63-67.
- CHAKRAVARTHI, V., E N. SUNDARARAJAN, 2007, 3D gravity inversion of basement relief - A depth-dependent density approach: *Geophysics*, 72, I23-I32.
- CHAVEZ, R. E., E GARLAND, G. D., 1985, Linear inversion of gravity data using the spectral expansion method: *Geophysics*, 50, 820-824.
- CORBATÓ, C. E., 1965, A least-squares procedure for gravity interpretation. *Geophysics*, v 30, p. 228-233.
- DARCICLÉA F. SANTOS, JOÃO B. C. SILVA, CRISTIANO M. MARTINS, RAPHAEL DI CARLO S. DOS SANTOS, LAISSE C. RAMOS, and ANA CAROLINA M. DE ARAÚJO. Efficient gravity inversion of discontinuous basement relief *GEOPHYSICS*, VOL. 80, NO. 4 (JULY-AUGUST 2015); P. G95-G106, 12 FIGS. 10.1190/GEO2014-0513.1.
- EL-BATROUKH, S. I., E ZENTANI, A. S., 1980, Gravity interpretation of Raguba field, Sirte basin, Libya: *Geophysics*, 45, 1153-1163.
- EMILIA, D.A. Equivalent sources used as an analytic base processing total magnetic field profile. *Geophysics*, vol. 38, n. 2, 1973. p. 339-348.
- GIMENEZ, M. E., MARTINEZ, M. P., JORDAN, T. RUÍZ, F. E KLINGER, F. L., 2009, Gravity characterization of the La Rioja Valley Basin, Argentina: *Geophysics*, 74, 3, B83-B94.

- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Bull Princeton Univ., 13, L-20. 1902.
- JACKSON, D. D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient, and inconsistent data: Geophy. J. R. Astr. Soc., 28, 97-110.
- KIENIEWICZ, P. M., E LUYENDYK, B. P., 1986, A gravity model of the basement structure in the Santa Maria Basin, California, Geophysics, 51, 1127-1140.
- JORGE W. D. LEÃO E JOÃO B. C. SILVA, 1989, Discrete Lineartransformations of Potential Field Data.
- LITINSKY, V. A., 1989, Concept of effective density: Key to gravity depth determinations for sedimentary basins: Geophysics, 54, 1474-1482.
- MARQUARDT, D. W., 1963, An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters: Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 2, 601-612.
- MARTINS, CRISTIANO M. WILLIAMS A. LIMA, VALERIA C. F. BARBOSA, AND JOÃO B. C. SILVA Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 – Mathematical details and applications. GEOPHYSICS, VOL. 76, NO. 1 _JANUARY-FEBRUARY 2011_; P. I1–I12, 8 FIGS. 10.1190/1.3524286.
- MENEZES, P. T. L., BARBOSA, V, C, F, E SILVA, J. B. C, 2007, Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth: Geophysics, 72, 3, B59-B68.
- NETTLETON, L. L., 1976, Gravity and magnetics in oil prospecting: McGraw-Hill Book Co.
- SILVA, J. B. C., COSTA, D. C. L. E BARBOSA, V. C. F., 2006, Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth: Geophysics, 71, 5, J51-J58.
- SILVA, J. B. C., D. F. SANTOS, and K. P. GOMES, 2014, Fast basement relief inversion: Geophysics, 79, no. 5, G79–G91, doi: 10.1190/geo2014-0024.1.

- SILVA, J. B. C., OLIVEIRA, A. S. E BARBOSA, V. C. F., 2010, Gravity inversion of 2D basement relief using entropic regularization: aceito para publicação, *Geophysics*. 75, I29-I35.
- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Potential field inversion: choosing the appropriate technique to solve a geologic problem. ***Geophysics***, v. 66, n. 2, p. 511-520. 2001.
- TANNER, J. G., 1967, An automated method of gravity interpretation: *Geophys. J. Royal. Astronomical. Society.*, 13, 339-347.
- TIKHONOV, A. N.; ARSEININ, V. Y, 1977, *Solutions of ill-posed problems*. Washington: V.H. Winston & Sons.