



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Filtragem de Múltiplas de Superfície Usando Morfologia Matemática

ANDREI GOMES DE OLIVEIRA

Belém
2017

ANDREI GOMES DE OLIVEIRA

Filtragem de Múltiplas de Superfície Usando Morfologia Matemática

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientadora: Ellen de Nazaré Souza Gomes

Coorientador: Jacques Facon

Belém
2017

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Oliveira, Andrei Gomes de, 1969-
Filtragem de Múltiplas de Superfície Usando Morfologia
Matemática / Andrei Gomes de Oliveira. – 2017.

108 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientadora: Ellen de Nazaré Souza Gomes
Coorientador: Jacques Facon

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará,
Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em
Geofísica, Belém, 2017.

1. Espalhamento múltiplo (Física). 2. Tomografia
sísmica. 3. Imageamento acústico. 4. Filtros e filtração. 5.
Morfologia - Matemática. I. Título.

CDD 22. ed. 539.758

ANDREI GOMES DE OLIVEIRA

**Filtragem de Múltiplas de Superfície Usando Morfologia
Matemática**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Geofísica da Universidade Federal do Pará para obten-
ção do título de Doutor em Geofísica.

Data de aprovação: 22 de maio de 2017

Banca Examinadora:



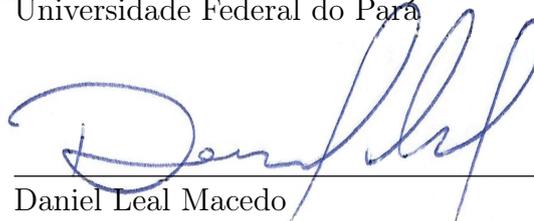
Ellen de Nazaré Souza Gomes (Orientadora)
Universidade Federal do Pará



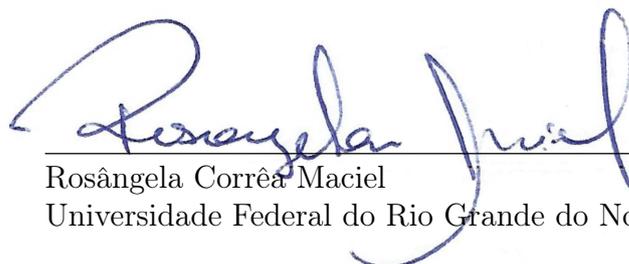
Aldenize Ruela Xavier
Universidade Federal do Oeste do Pará



José Jadsom Sampaio de Figueiredo
Universidade Federal do Pará



Daniel Leal Macedo
Universidade Federal do Pará



Rosângela Corrêa Maciel
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dedico este trabalho aos meus filhos João Vitor e Ana Luiza, que
são a razão de minha vida e de minha inspiração.

A minha esposa Daniele Cristina pela paciência e por cuidar bem
de nossa família na minha ausência ou da minha falta de tempo.

A minha mãe pela grande ajuda e colo que sempre me destes,
mesmo nas horas mais difíceis. Saudades...

Ao meu pai pelos diálogos, livros e apoio. Saudades...

Aos meus irmãos Yuri e Iandê por me apoiarem e me incentivarem.

Ao meu tio Emir pelo grande homem que foi em nossas vidas.

A Renilde pelo amor que nos emprestou por toda a sua vida.

A Deus por nossa existência e nossa saúde.

AGRADECIMENTOS

Ao grupo de Métodos Sísmicos do Instituto de Geociências da UFPa pelos recursos disponibilizados: laboratórios, livros e tempo.

A UFPa, CAPES e Petrobrás pelo apoio financeiro.

A professora Ellen de Nazaré Souza Gomes pela dedicação e paciência.

Aos demais professores pelo conhecimento, disponibilidade e amizade que se propuseram.

Aos meus colegas de curso pelas longas jornadas de estudo juntos e pelos grandes desafios vencidos.

Aos meus eternos amigos aqui estabelecidos Francisco Oliveira e Wildney, pelas longas conversas na tentativa de solucionar problemas no Latex, Matlab, Fortran, etc. Ainda sim pela relação construída entre nós.

Aos professores Marcos Welby, João Batista e Cícero pela confiança creditada.

A todos os funcionários do CPGf (Benildes e Lucibela). Aos funcionários do IG minha eterna gratidão.

A UNICAMP pelo espaço cedido, o amigo João Renato, aos professores Martin Tygel, Joerg, Maria Amélia e ao amigo e professor Thiago.

RESUMO

A presença de múltiplas é um fator constante em dados sísmicos adquiridos. Especificamente as múltiplas de superfície livre, presentes em levantamentos marinhos, são um desafio para a interpretação sísmica, pois sua grande energia pode falsear refletores e gerar artefatos. Neste trabalho é apresentada a proposta de utilização da morfologia matemática para atenuação de múltiplas de superfície livre. A morfologia matemática se baseia na forma das estruturas, realçando ou atenuando. A morfologia matemática é aplicada a dados sintéticos, onde diferentes formas geométricas para os refletores são usadas. Os resultados obtidos foram satisfatórios, mostrando a potencialidade desta metodologia na atenuação de múltiplas de superfície livre e de outros tipos de artefatos.

Palavras-chaves: Processamento sísmico. Imageamento. Eliminação de múltiplas de superfície. Filtragem. Morfologia matemática.

ABSTRACT

The presence of multiple is a constant factor in seismic data acquired. Specifically the multiple free-surface, present in marine surveys, is a challenge for the seismic interpretation, because its great energy can falsify reflectors and generate artifacts. In this work the proposal of the use of mathematical morphology for multiple attenuation of free-surface is presented. Mathematical morphology is based on the shape of structures, enhancing or attenuating. Mathematical morphology is applied to synthetic data, where different geometric shapes for the reflectors are used. The results were satisfactory, showing the potential of this methodology in the attenuation of multiple free-surface and other types of artifacts.

Keywords: Seismic processing. Imaging. Attenuation multiple free surface. Filtering. Mathematical morphology.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REFLEXÕES MÚLTIPLAS	3
2.1	CLASSIFICAÇÃO	3
2.1.1	Quanto à origem	3
2.1.2	Quanto à simetria	3
2.1.3	Quanto ao tempo de percurso	4
2.1.4	Quanto ao número de reflexões	4
2.2	CARACTERÍSTICAS	4
3	MORFOLOGIA MATEMÁTICA	11
3.1	FUNDAMENTOS	11
3.2	NOÇÕES BÁSICAS DE MORFOLOGIA MATEMÁTICA	15
3.2.1	Translação e Simetria	15
3.2.2	Operações de Minkowski	16
3.3	PROPRIEDADES BÁSICAS	17
3.3.1	Invariância à Translação	17
3.3.2	Invariância à Homotetia - Mudança de Escala	18
3.3.3	Conhecimento Local	18
3.3.4	Semi-Continuidade	19
3.4	OPERAÇÕES UTILIZADAS NA MORFOLOGIA MATEMÁTICA	20
3.5	MORFOLOGIA MATEMÁTICA BINÁRIA	20
3.5.1	Aspecto Digital	21
3.5.2	Operadores Elementares	22
3.5.3	Erosão Binária	23
3.5.4	Dilatação Binária	26
3.6	MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM NÍVEIS DE CINZA	28
3.6.1	Noção de Umbra	28
3.6.2	Considerações matemáticas	29
3.6.3	Erosão em níveis de Cinza	32
3.6.4	Dilatação em níveis de Cinza	33
3.7	MORFOLOGIA MATEMÁTICA FUZZY	35
3.7.1	Conceitos e Fundamentos	37
3.7.1.1	Alfa Nível ou α -nível	38
3.7.1.2	Conjuntos Fuzzy Discretos	39
3.7.1.3	Conjuntos Fuzzy Contínuos	39
3.7.2	Operações com Conjuntos Fuzzy	42

3.7.2.1	Tipos de T-norma	47
3.7.2.2	Tipos de T-conorma	47
3.7.3	Relações Fuzzy	48
3.7.4	Composição de Relações Fuzzy	49
3.7.4.1	Erosão Fuzzy	51
3.7.4.2	Dilatação Fuzzy	51
4	APLICAÇÃO DA MORFOLOGIA PARA ATENUAÇÃO DE MÚLTIPLAS DE SUPERFÍCIE	53
4.1	PROCESSAMENTO	54
4.1.1	Geometria	55
4.1.2	Edição	55
4.1.3	Organização em Famílias CMP	55
4.1.4	Análise de Velocidade	55
4.1.5	Correção NMO	56
4.1.6	Empilhamento	56
4.1.7	Migração	57
4.2	APLICAÇÃO DA MORFOLOGIA MATEMÁTICA	58
4.3	TESTES SINTÉTICOS	59
4.3.1	Modelo 1 - Formado por um Refletor Plano e Horizontal	60
4.3.2	Modelo 2 - Formado por dois Refletores Planos e Horizontais	67
4.3.3	Modelo 3 - Formado por Múltiplos Refletores Planos e Horizontais	73
4.3.4	Modelo 4 - Formado por um Refletor Inclinado com 5°	79
4.3.5	Modelo 5 - Formado por um Refletor Curvo com Mergulho de 20°	84
4.3.6	Modelo 6 - Formado por um Refletor em Sinclinal	89
5	CONCLUSÃO	94
	Referências Bibliográficas	96

1 INTRODUÇÃO

O método sísmico de reflexão constituiu-se no método geofísico mais utilizado na prospecção de hidrocarboneto. Através de dados de reflexão primária de ondas elásticas é possível construir imagens aproximadas da subsuperfície e a partir da interpretação dessas imagens são determinados possíveis alvos de interesse.

Durante a aquisição sísmica além das reflexões sísmicas, outros eventos são registrados. É no processamento sísmico que os dados registrados são tratados e eventos de reflexão primária são acentuados e os demais eventos são atenuados. Com os dados de reflexão uma imagem da subsuperfície é gerada. A qualidade dos dados de reflexão adquiridos é fundamental para a obtenção de imagens confiáveis da subsuperfície.

Um dos principais fatores que afeta diretamente a qualidade das imagens sísmicas são as reflexões múltiplas. Reflexões múltiplas são geradas por reflexões que ao encontrarem uma interface na superfície são refletidas de volta para a subsuperfície. O registro dessas reflexões múltiplas dificulta o trabalho de interpretar refletores, desta forma, na etapa de processamento esses eventos são atenuados.

Neste trabalho foi apresentada uma forma de atenuar as múltiplas geradas na interface ar-água, chamada de múltipla de superfície livre. Este tipo de reflexão múltipla possui muita energia e é capaz de mascarar refletores mais profundos (Verschuur, 2006).

Existem várias metodologias desenvolvidas para atenuar as reflexões múltiplas baseadas na natureza periódica ou sobretempo destes eventos: transformada $\tau - p$ (Tatham et al., 1983; Tatham, 1989), predição de múltiplas (Riley e Claerbout, 1976; Berkhout, 1984; Verschuur et al., 1989). Destas metodologias destacam-se a filtragem SRME e a deconvolução preditiva (Verschuur et al., 1989, 1992; Verschuur e Berkhout, 1992; Yilmaz, 2001; Verschuur, 2006; Berkhout e Verschuur, 1997; Verschuur e Berkhout, 1997).

Resultados satisfatórios são alcançados com a aplicação conjunta destas metodologias (Oliveira, 2011), entretanto, isso acaba por gerar, além da perda de sinal, eventos incoerentes. Desta forma a busca por novas metodologias para atenuação de múltiplas é importante.

A contribuição deste trabalho esta na utilização da morfologia matemática como um filtro para atenuar a múltipla diretamente na imagem migrada através da utilização de técnicas de processamento digital de imagem. Neste trabalho realizou-se testes em dados sintéticos cujos refletores apresentam diversas geometrias como: refletores planos, inclinados ou com curvatura suave. A aquisição sísmica foi gerada no pacote de processamento sísmico Seismic Unix (Stockwell, 2012). O filtro morfológico foi desenvolvido na linguagem C onde as rotinas matemáticas foram projetadas, baseadas na teoria dos conjuntos difusos ou lógica difusa e aplicados aos dados sísmicos.

O trabalho esta dividido da seguinte forma: no Capítulo 2, foi apresentada uma breve

introdução sobre reflexões múltiplas e suas características. No Capítulo 3, os principais fundamentos da teoria da morfologia matemática foram apresentados. Foi dada ênfase a morfologia matemática fuzzy, utilizada neste trabalho. No Capítulo 4, a morfologia foi aplicada para atenuar múltiplas de superfície em dados sísmicos. Foram testados diversos tipos de refletores e parâmetros da morfologia. No fim, uma análise dos resultados foi apresentada. No Capítulo 5, foram apresentadas as conclusões da aplicação da morfologia matemática para atenuar múltiplas de superfície, suas limitações, além de algumas recomendações para trabalhos futuros que utilizem morfologia matemática como filtro para dados sísmicos.

2 REFLEXÕES MÚLTIPLAS

Neste capítulo foi apresentado um resumo sobre as reflexões múltiplas de acordo com Verschuur (2006). Medidas de reflexão sísmica são geralmente feitas com fontes e receptores que podem estar posicionados na superfície da Terra, próximos a superfície ou ainda dispostos dentro de poços (VSP). A partir das medidas de reflexões sísmicas é criada uma imagem da subsuperfície.

Os métodos sísmicos de reflexão se fundamentam na reflexão de ondas acústicas ou elásticas que são produzidas artificialmente para estimar estruturas geológicas que compõem a subsuperfície. Ao se propagarem em subsuperfície as ondas sofrem uma série de fenômenos e interferências que alteram sua amplitude e frequência.

Um dos fatores que dificultam a interpretação das seções sísmicas é a presença de reflexões múltiplas. O caso mais grave, acontece em dados marinhos que possuem múltiplas de superfície. Essas múltiplas de superfície possuem energia considerável quando comparada com reflexões mais profundas e assim podem mascarar essas reflexões e induzir a interpretações erradas. Reflexões múltiplas podem ser divididas em vários tipos de acordo com sua origem, simetria, percurso e quanto à ordem como visto em Verschuur (2006); Oliveira (2011).

2.1 CLASSIFICAÇÃO

2.1.1 Quanto à origem

Está relacionado a interface onde as múltiplas sofrem o espalhamento descendente. Podem ser classificadas em:

- Múltiplas de superfície livre - são múltiplas relacionadas ao primeiro refletor. No caso marinho, se origina da interface ar-água.
- Múltiplas internas - são múltiplas cuja a reflexão descendente acontece em uma interface mais profunda que o primeiro refletor abaixo da superfície. Para o caso marinho se origina nas camadas abaixo da superfície livre.

2.1.2 Quanto à simetria

Está relacionada a trajetória de ida (descendente) e volta (ascendente) da reflexão múltipla, da subsuperfície. Podem ser classificadas em:

- Múltiplas simétricas - apresentam a trajetória descendente simétrica a trajetória ascendente.

- Múltiplas assimétricas - apresentam a trajetória descendente assimétrica a trajetória ascendente.

2.1.3 Quanto ao tempo de percurso

Está relacionado ao tempo de percurso da reflexão múltipla em relação a reflexão primária. Podem ser classificadas em:

- Múltiplas de pequeno percurso - também chamadas de peg-legs, possuem tempo de trânsito muito próximo do tempo das reflexões primárias, não podendo ser identificadas separadamente.
- Múltiplas de grande percurso - possuem tempo de trânsito bem maior que o tempo de trânsito das reflexões primárias.

2.1.4 Quanto ao número de reflexões

Refere-se a quantidade de reflexões descendentes que a múltipla pode sofrer. Podem ser classificadas em:

- Múltiplas de 1ª ordem - são aquelas que possuem uma reflexão descendente.
- Múltiplas de 2ª ordem - são aquelas que possuem duas reflexões descendentes.

As reflexões múltiplas de ordem n possuem n reflexões descendentes. Para que as reflexões múltiplas sejam tratadas no dado sísmico, conhecer suas características é fundamental para o desenvolvimento de técnicas de atenuação das mesmas.

2.2 CARACTERÍSTICAS

Em seções sísmicas empilhadas ou migradas de dados com presença de reflexões múltiplas, as seguintes características são observadas:

- Repetição periódica de refletores: o evento de reflexão é repetido em intervalos regulares com amplitudes que vão decrescendo ou crescendo de uma forma regular com o tempo (Fig. 2.1).
- Refletores com mergulho conflitante (Fig. 2.2).
- Para refletores inclinados, eventos que apresentam aumento dessa inclinação (Fig. 2.3).
- Efeitos de focalização e desfocalização (Fig. 2.4).
- Interferência com refletores mais profundos e com diversos tipos de reflexões múltiplas (Fig. 2.5).

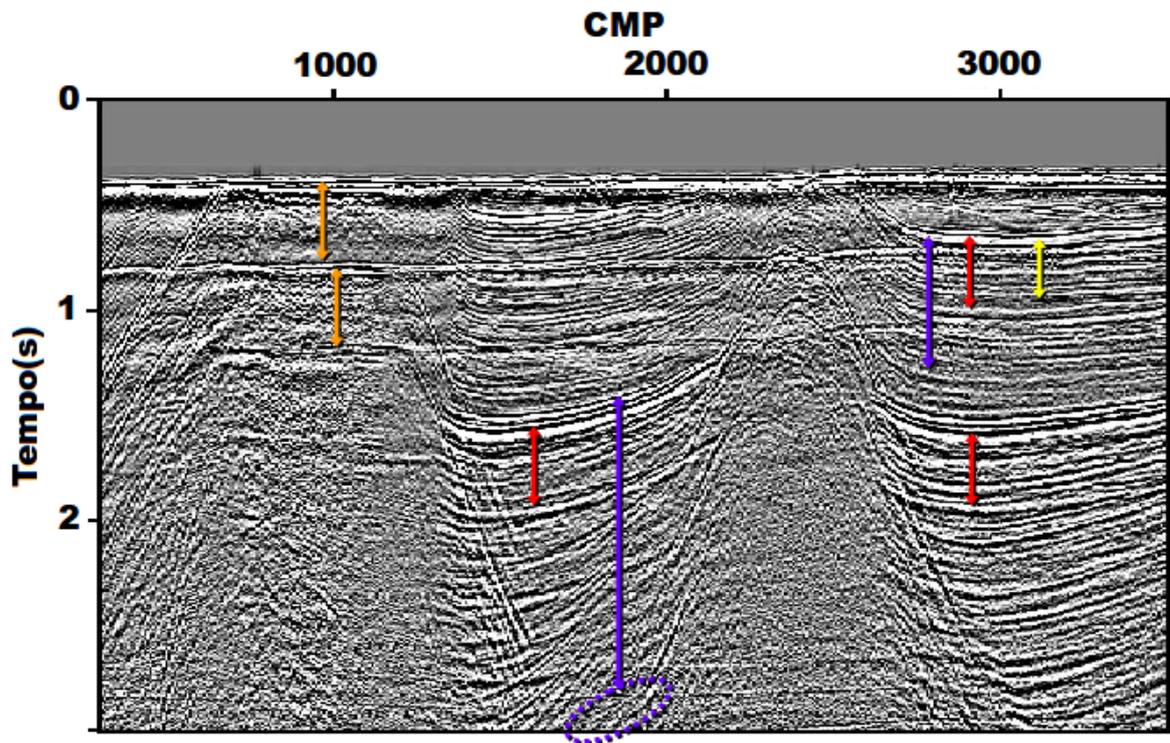


Figura 2.1: Diferentes categorias de reflexões múltiplas identificadas na seção empilhada para um dado de campo da região de Nordkapp, mar da costa da Noruega (dado cortesia da Exxon Mobil). As setas laranjas indicam reflexões múltiplas referentes a camada de água, as setas vermelhas indicam as reverberações da camada de água e as setas azuis indicam reflexões múltiplas relacionadas à superfície que não estão relacionadas com a camada de água. As setas amarelas indicam, possivelmente, uma reflexão múltipla interna. Fonte: Modificado de Verschuur (2006).

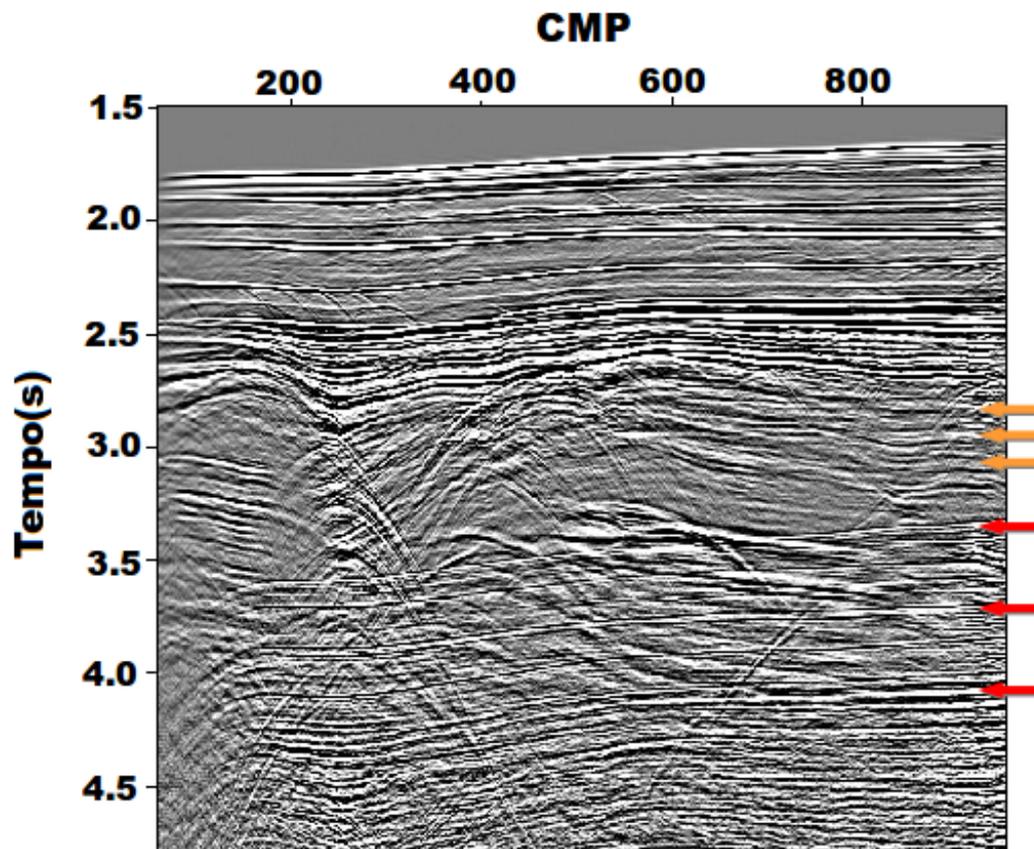


Figura 2.2: Reflexões múltiplas muitas vezes se caracterizam, por mergulhos conflitantes com as reflexões primárias (veja as setas) devido ao fato de que as condições de águas rasas que geram as reflexões múltiplas tem uma orientação diferente e formas diferentes em comparação com as reflexões primárias mais profundas. As setas vermelhas indicam as reflexões múltiplas relacionadas a superfície e as setas laranjas indicam reflexões múltiplas internas. Seção empilhada do mar da costa da Noruega (dado cortesia da Statoil). Fonte: Modificado de Vershuur (2006).

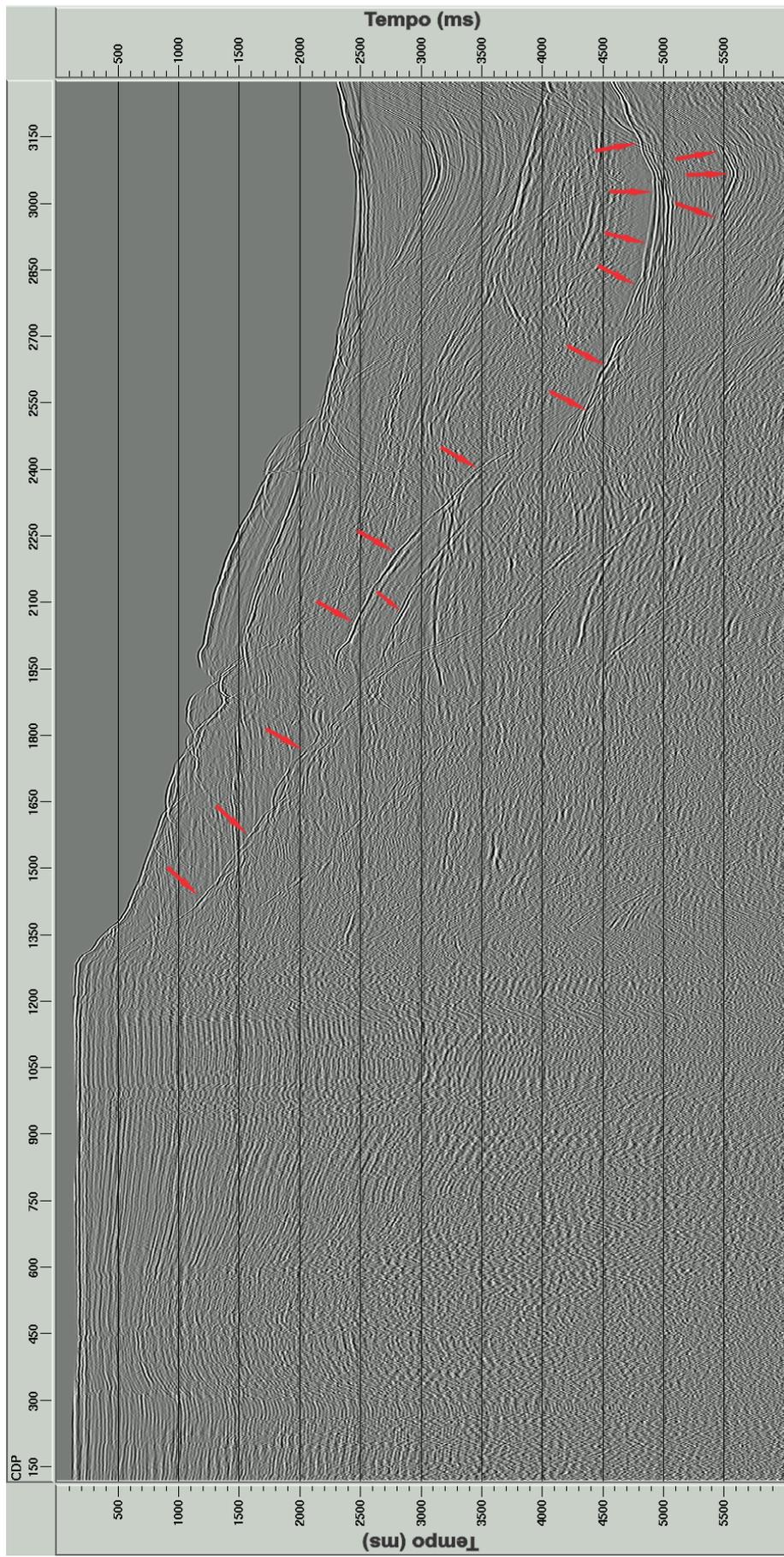


Figura 2.3: Reflexões múltiplas, muitas vezes se caracterizam, pelo aumento da inclinação do refletor se comparado com resultado gerado pelas reflexões primárias. Na Figura acima, as setas vermelhas indicam refletor gerado pelas reflexões múltiplas relacionadas a superfície, este possui inclinação maior que o assoalho oceânico (seção empilhada linha 0214-0266 da Bacia do Jequitinhonha).

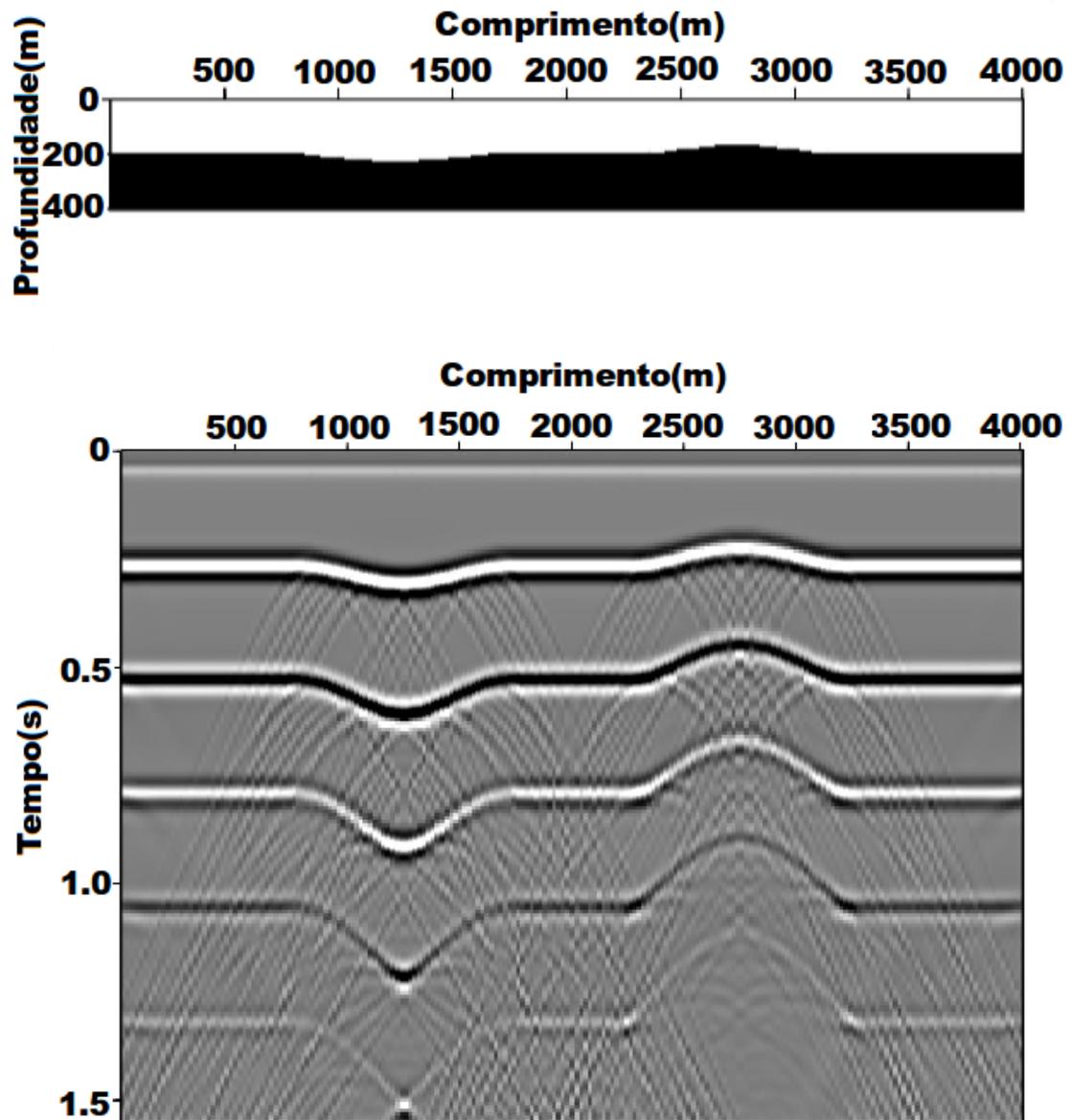


Figura 2.4: Pequenas variações na geometria dos limites que geram as reflexões múltiplas, como nas estruturas sinclinal e anticlinal no fundo oceânico, gerarão efeitos de focalização e desfocalização nas reflexões múltiplas registradas. Note que a energia está concentrada (focalizada) na parte inferior da feição sinclinal e ao redor das bordas da feição anticlinal. Fonte: Modificado de Verschuur (2006).

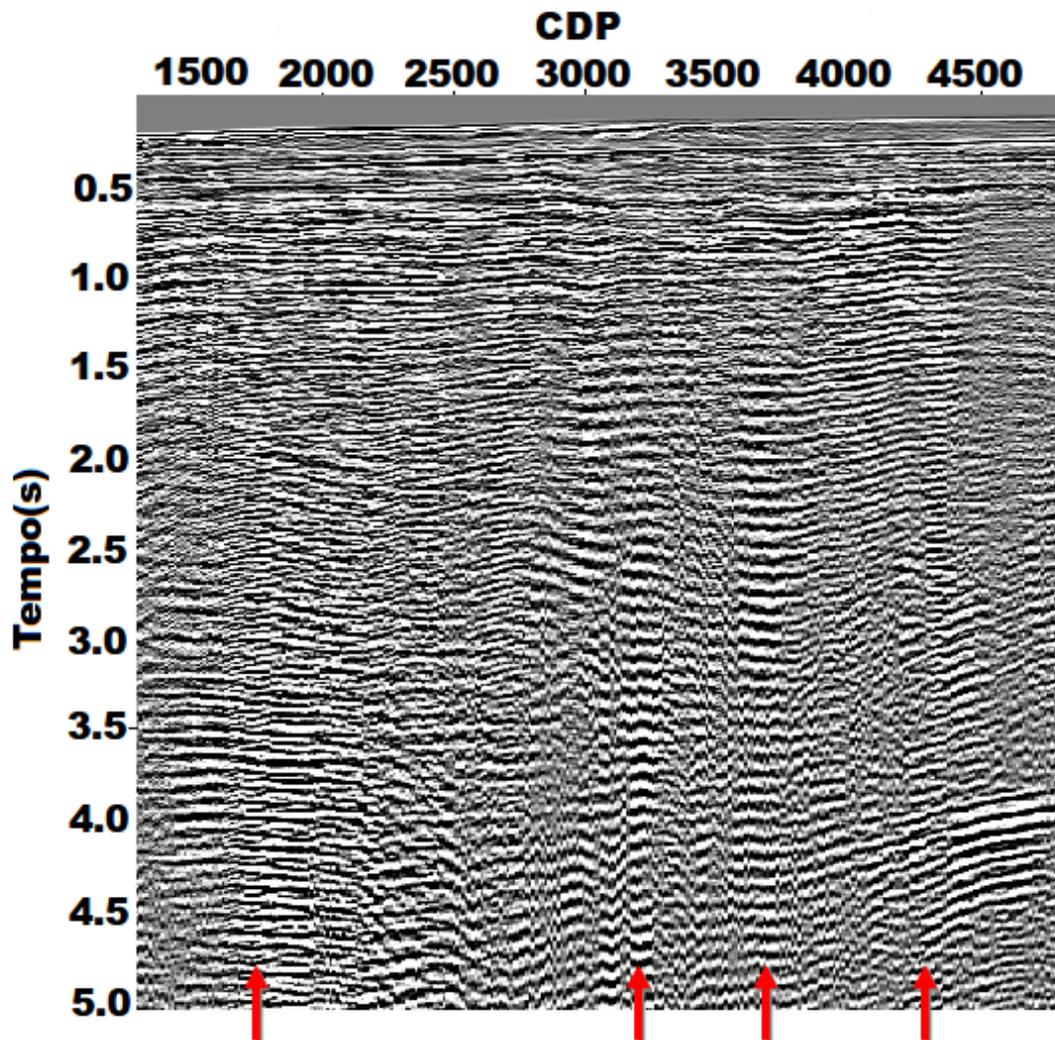


Figura 2.5: A presença de diferentes tipos e ordens de reflexões múltiplas resulta em um padrão de interferência. Pequenas variações na amplitude das reflexões e na geometria dos limites que geraram as reflexões múltiplas na parte rasa da seção resulta em fortes variações na energia das reflexões múltiplas, como pode ser visto nas setas vermelhas (seção empilhada de mar adentro do Oeste da Austrália, dado cortesia da BHP Petroleum). Fonte: Modificado de Verschuur (2006).

Para mais detalhes sobre reflexões múltiplas, suas características e exemplos, podem ser encontrados em Verschuur (2006); Oliveira (2011). As metodologias de atenuação de reflexões múltiplas são classificadas na literatura de várias formas. Algumas delas são propostas na classificação feita por Verschuur (2006) que divide as metodologias de atenuação de múltiplas em duas grandes categorias: as que são baseadas na diferença de comportamento espacial entre reflexões primárias e reflexões múltiplas, são exemplos as filtragens $f-k$ e Radon; as que são baseadas na periodicidade e preditividade das reflexões múltiplas, são exemplos a deconvolução preditiva no domínio $\tau-p$ e o SRME. Os melhores resultados são encontrados quando essas técnicas são aplicadas de maneira combinada (Oliveira, 2011; Oliveira e Gomes, 2013). Entretanto, toda técnica apresenta limitações

e muitas vezes precisam ser aplicadas de forma combinada, o que torna o processamento complexo e sujeito a erros. Assim, a procura de técnicas que auxiliam na atenuação das reflexões múltiplas tem sido objeto de estudos. Neste trabalho a morfologia matemática foi aplicada como um filtro para atenuação das reflexões múltiplas de superfície. Esta metodologia baseou-se na característica periódica e na forma das reflexões múltiplas de superfície para filtrá-las da imagem migrada. No próximo capítulo foi apresentada uma breve introdução da morfologia matemática.

3 MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Neste trabalho foi abordado o uso de filtros morfológicos matemáticos para aplicar na atenuação de reflexões múltiplas de superfície. A morfologia matemática que é diferente do método tradicional de filtragem, tornou-se um novo método de filtragem que foi introduzido no processamento digital de imagem sísmica. Foi discutida apenas a aplicação da morfologia matemática diretamente na imagem gerada na tentativa de obter um resultado rápido e confiável, considerando que reflexões múltiplas de superfície são facilmente identificáveis no dado sísmico, partindo de modelos extremamente simples com camadas horizontais planas até modelo com mergulho e complexidade moderada.

3.1 FUNDAMENTOS

A palavra Morfologia é originalmente um ramo da biologia que estuda as formas e estruturas dos animais e plantas. Usa-se esta palavra no contexto da Matemática como um instrumento para a extração de componentes da imagem que sejam úteis para representação e descrição da forma de uma região, como fronteiras geológicas, esqueletos e vegetação de uma floresta.

A morfologia matemática surgiu em 1964 das pesquisas conjuntas de G. Matheron e J. Serra, seu nome foi cunhado em 1966 e criado em 1968 no “Centre de Morphologie Mathématique” na cidade de Fontainebleau na “Mines Paris Tech”. Entre 1964 e 1968, foram estabelecidas as primeiras noções teóricas (operações: abertura, fechamento e *Hit-Miss*). Os principais resultados obtidos nesse centro ao longo de três décadas de pesquisa foram organizados em três grandes obras literárias: “Random Sets and Integral Geometry” escrito por Matheron (1975); “Image Analysis Mathematical Morphology” e “Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances” escrito por Serra (1982) e Serra (1988), respectivamente. Esses três livros, hoje clássicos da área, estabeleceram as bases da teoria e indicaram como ela pode ser aplicada a problemas reais de análise de imagens (Banon e Barrera, 1994).

As bases teóricas da morfologia matemática para subconjuntos foram formalizadas pelos próprios Serra e Matheron, nos primeiros anos de pesquisa. Estudando as dilatações e erosões, eles descobriram uma coleção de propriedades interessantes e chegaram a um resultado instigante: qualquer operador invariante por translação (i.t.) e isotônico ou crescente (i.e., que preserva a relação de inclusão) pode ser decomposto como um supremo de erosões ou ínfimo de dilatações. Em outros termos as dilatações e erosões são os elementos fundamentais para construir uma ampla classe de operadores (Banon e Barrera, 1994).

A morfologia matemática deve levar em consideração modelos matemáticos. Isto signi-

fica que será necessário o estudo de estruturas matemáticas. E por sua vez estas estruturas são do tipo imagem. Porém, uma imagem não é uma matéria. Por definição, uma imagem é uma representação gráfica, plástica ou fotográfica de um objeto. Portanto, ela pode conter qualquer tipo de matéria (Facon, 1996).

Para tratar qualquer tipo de matéria, podemos dizer que a morfologia matemática pode ser aplicada em inúmeras áreas. De fato, é possível analisar matéria proveniente da biologia, da metalografia, da medicina, da visão robótica, do controle de qualidade, do reconhecimento de padrões, da geologia, da geofísica, etc (Facon, 1996). Em termos de imagens, a morfologia matemática, que representa um ramo do processamento não linear, permite processar imagens com objetos de realce, de segmentação, de detecção de bordas, de esqueletização, de afinamento de análise de formas, de compressão, etc (Facon, 1996).

A linguagem da morfologia matemática é a *Teoria dos Conjuntos*. Conjuntos em morfologia representam objetos numa imagem. O conjunto de todos os pixels pretos em uma imagem binária são uma descrição completa desta imagem. É amplamente utilizada em problemas de reconstrução e restauração de imagens corrompidas por ruídos. Em uma imagem desconhecida é extraída sua geometria através da utilização da transformação de uma outra imagem completamente bem definida, ou seja, consiste em extrair as informações relativas a geometria e a topologia de um conjunto desconhecido (no caso uma imagem, veja Fig. 3.1a) pela transformação através de outro conjunto bem definido, chamado elemento estruturante (Fig. 3.1b).

O elemento estruturante (Fig. 3.1b) é um conjunto completamente definido e conhecido (forma e tamanho), que é comparado, a partir de uma transformação, aos conjuntos desconhecidos da imagem (Fig. 3.1a). O formato e o tamanho do elemento estruturante possibilitam testar e quantificar de que maneira o elemento estruturante “está ou não está contido” na imagem. O resultado dessa transformação permite avaliar estes conjuntos. A Figura 3.1 ilustra uma imagem binária (a), elemento estruturante (b) e exemplos de interação. Verifica-se que, em função de sua posição, esse elemento estruturante inclui-se ou não inclui-se no conjunto desconhecido da imagem. Marcando os resultados das posições onde o elemento estruturante inclui-se na imagem, temos uma primeira resposta sobre a estrutura geométrica da entidade dessa imagem (Facon, 1996).

No exemplo da Figura 3.1, nota-se que, em algumas posições do elemento estruturante, esse pode se encaixar em alguns dos conjuntos da imagem. Em outras ele não cabe. Se o formato ou o tamanho do elemento estruturante for modificado, teremos outras respostas. O tipo e a natureza da informação extraída depende necessariamente do tipo de elemento estruturante e do tipo de imagem estudada (Facon, 1996).

De uma forma geral, existem dois tipos de morfologia matemática: a *morfologia binária* que se aplica sobre imagens binárias (preto e branco) e a *morfologia cinzenta* que se aplica sobre imagens em níveis de cinza. Na morfologia binária, na vizinhança de cada pixel da imagem original, é procurada uma configuração de pontos pretos e brancos.

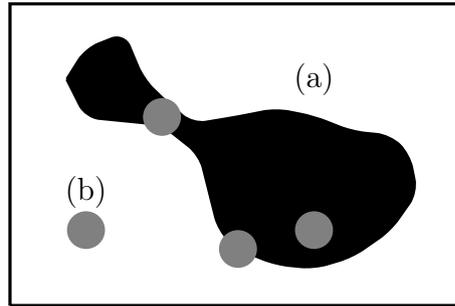


Figura 3.1: Exemplo de interação da imagem binária (a) com o elemento estruturante (b). Fonte: Modificado de Facon (1996).

Quando a configuração é encontrada, ao pixel correspondente da imagem resultante é dado o rótulo “verdadeiro”; senão, o pixel resultante é dado o rótulo “falso”. Uma operação morfológica binária é portanto completamente determinada a partir da vizinhança examinada ao redor do ponto central, da configuração de pontos pretos e brancos nessa vizinhança e do algoritmo (Facon, 1996).

Na morfologia para imagens em níveis de cinza (Fig. 3.2), na vizinhança de cada pixel ou numa parte da vizinhança da imagem original, é necessário conhecer o valor do pixel mais escuro MIN , o valor do pixel mais claro MAX . O valor do pixel resultante corresponde a uma combinação particular de MAX e MIN . O tamanho e a forma da vizinhança, as regiões de pesquisa de MIN e MAX e o algoritmo determina completamente uma operação de morfologia para imagens em níveis de cinza (Facon, 1996).

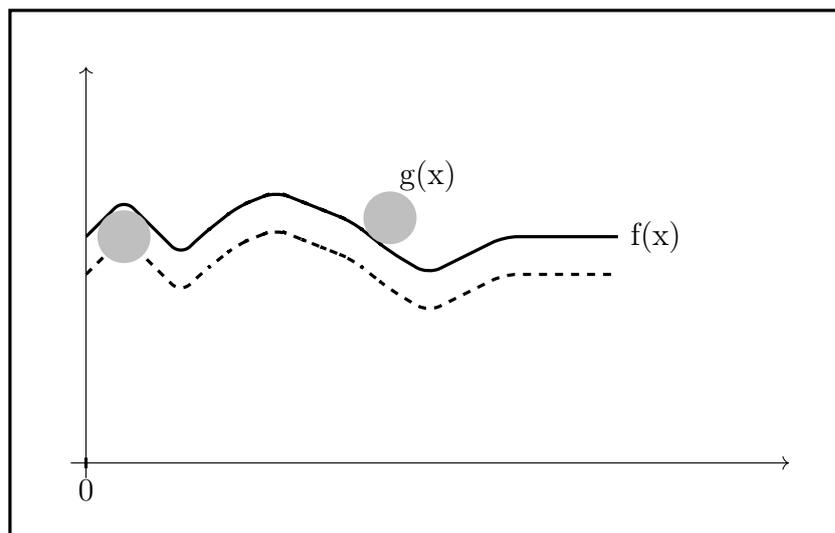


Figura 3.2: Exemplo de interação entre elemento estruturante $g(x)$ e a imagem cinza $f(x)$. Fonte: Modificado de Facon (1996).

A morfologia age sobre imagens digitais a partir do elemento estruturante geralmente definido em uma malha retangular. Mas, do ponto de vista teórico, a obtenção dos resultados perfeitamente exatos pode ser alcançada somente a partir de uma malha hexagonal

exata (Serra, 1982), veja a Figura 3.3c. Esse tipo de malha tem a propriedade de isotropia que torna todos os vizinhos de um ponto, numa mesma vizinhança, equidistantes dele, qualquer que seja a direção considerada (Fig. 3.3). A isotropia não é respeitada por outros tipos de malhas e inclusive a malha retangular (Pomerol et al., 2003):

- Numa malha quadrada, os vizinhos estão a uma distância seja de 1 ou seja de $\sqrt{2}$ (Fig. 3.3a);
- Numa malha retangular, os vizinhos estão a uma distância seja de 0,75, seja de 1 ou seja de 1,25 (Fig. 3.3b);
- Numa malha hexagonal exata, todos os vizinhos estão a uma distância de 1 (Fig. 3.3c).

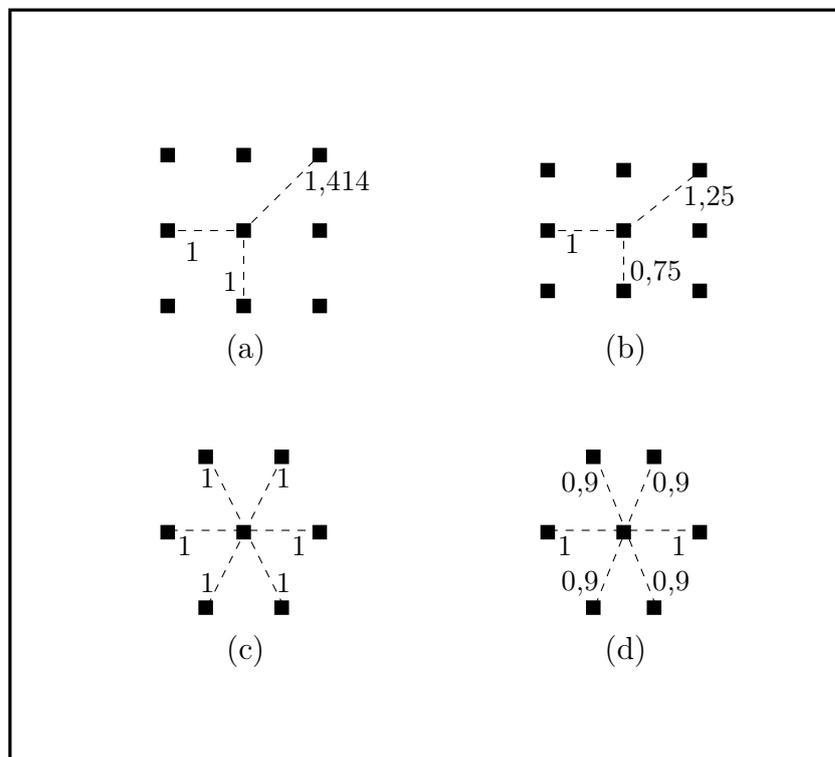


Figura 3.3: Exemplo de diferentes malhas: a) quadrada, b) retangular, c) hexagonal exata e d) hexagonal aproximada. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Apesar de representar a malha perfeita, em termos de processamentos morfológicos, a malha hexagonal exata é pouco usada pela necessidade de um hardware específico. Quando o hardware do sistema de processamento de imagens permite, é aconselhável usar uma malha hexagonal aproximada que pode ser obtida pelo deslocamento da amostragem de 0.5 pixel a cada duas linhas. A malha hexagonal aproximada apresenta as vantagens de poder ser implementada a partir da malha quadrada ou retangular com a qual a imagem foi digitalizada e de fornecer uma boa aproximação das distâncias em relação à malha

hexagonal exata. Numa malha hexagonal aproximada, os vizinhos estão distantes de 0.9 ou de 1 (Fig. 3.3d) (Facon, 1996).

É fácil verificar que no caso da malha hexagonal aproximada, a vizinhança de um pixel é mais compacta e aproxima melhor a forma de disco do que no caso de uma malha retangular. Isso quer dizer que as camadas sucessivas de pixels que estão ao redor da vizinhança imediata de um ponto formam uma sucessão de círculos concêntricos e regulares na malha hexagonal. Consequentemente, no caso da malha hexagonal, a isotropia é melhor (Facon, 1996).

Em imagens binárias, os conjuntos em questão são membros do espaço bidimensional de números inteiros Z^2 , em que cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional cujas coordenadas são (x, y) dos pixels pretos da imagem. Imagens digitais em níveis de cinza podem ser representadas por conjuntos cujas componentes estejam no Z^3 . Explorar as propriedades geométricas dos sinais (níveis de cinza da imagem) como em Gonzales e Woods (2001) é um exemplo de interação. Em imagens binárias, um pixel será preservado, eliminado ou invertido em função de ter um certo número de vizinhos iguais ou diferentes.

3.2 NOÇÕES BÁSICAS DE MORFOLOGIA MATEMÁTICA

3.2.1 Translação e Simetria

Seja um subconjunto B de um conjunto \mathcal{E} . Este subconjunto pode sofrer algumas modificações. Por exemplo, o conjunto obtido de B pela translação do vetor h , denotado $B + h$, é (Facon, 1996):

$$B + h = \{y \in \mathcal{E} \rightarrow y - h \in B\}. \quad (3.1)$$

Este conjunto transladado, chamado B_h , pode ser também definido por:

$$y \in B \Rightarrow y + h \in B_h, \quad (3.2)$$

com as seguintes propriedades:

$$B_0 = B, \quad (3.3)$$

$$(B_h)_k = B_{h+k} = (B_k)_h. \quad (3.4)$$

O conjunto deduzido de B por simetria central pela origem B_0 do sistema de referência, denotado \tilde{B} e chamado de B transposto é:

$$y \in B \Rightarrow -y \in \tilde{B}, \quad (3.5)$$

$$B_h = (\tilde{B})_{-h}. \quad (3.6)$$

3.2.2 Operações de Minkowski

Na seção anterior foi definida a adição de um vetor com um conjunto (translação). Também é possível definir operações entre conjuntos. Duas delas, muito interessantes, desenvolvidas por Minkowski (1903); Hadwiger (1950, 1957), as quais são conhecidas como a adição e a subtração de Minkowski (Facon, 1996).

Sejam dois subconjuntos A e B de um conjunto \mathcal{E} . A adição de Minkowski de A com B , denotada $A \oplus B$, é o seguinte conjunto:

$$(A \oplus B)(x) = \{x \in \mathcal{E} : \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B : x = a + b\}. \quad (3.7)$$

Esta Definição 3.7 pode ser formulada de outras duas formas (Serra, 1982):

$$(A \oplus B)(x) = \bigcup_{b \in B} A_b, \text{ ou,} \quad (3.8)$$

$$(A \oplus B)(x) = \bigcup_{b \in B} A + b. \quad (3.9)$$

A Equações 3.8 e 3.9, também são conhecidas como união de Zadeh (Kerre e Nachtegael, 2000). Da mesma forma, a subtração de Minkowski do subconjunto A com o subconjunto B , denotada $A \ominus B$, é:

$$(A \ominus B)(x) = \{x \in \mathcal{E} : \forall b \in B, \exists a \in A : x = a - b\}. \quad (3.10)$$

Outras formulações desta Definição 3.10 (Serra, 1982), a ser usada posteriormente, são:

$$(A \ominus B)(x) = \bigcap_{b \in B} A_b, \text{ ou,} \quad (3.11)$$

$$(A \ominus B)(x) = \bigcap_{b \in B} A - b. \quad (3.12)$$

As Equações 3.11 e 3.12, também são conhecidas como intersecção de Zadeh (Kerre e Nachtegael, 2000). As propriedades destes operadores são amplamente detalhadas em Banon e Barrera (1994); Minkowski (1903); Hadwiger (1950, 1957); Kerre e Nachtegael (2000).

3.3 PROPRIEDADES BÁSICAS

Toda operação morfológica compõe-se de uma transformação ψ de um conjunto em outro e com uma métrica μ . $\psi(X)$ é um conjunto, $\mu(\psi(X))$ é um escalar. Esses operadores não são simplesmente matemáticos. Os seus efeitos não podem violar a realidade física que eles representam. ψ e μ devem respeitar as condições de contorno impostas pelas leis da percepção visual (Facon, 1996):

- a invariância à translação;
- a invariância à homotetia (mudança de escala);
- o conhecimento local;
- a semi-continuidade.

3.3.1 Invariância à Translação

Seja o conjunto transladado X_h a transformação do conjunto X pelo vetor h . De uma forma geral, existem dois tipos de transformações, as que não dependem da posição do referencial e as que dependem desta posição (Facon, 1996). Neste caso, podemos afirmar que a transformação ψ sobre um conjunto X é invariante com a translação h (Figs. 3.4 e 3.5). Podemos escrever:

$$\psi(X_h) = [\psi(X)]_h. \quad (3.13)$$

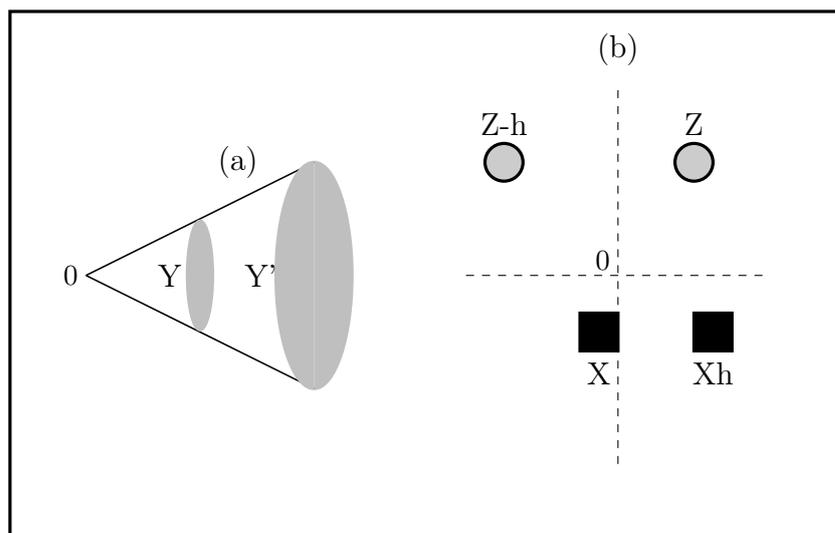


Figura 3.4: Translação e homotetia (mudança de escala). Na imagem (a) nota-se que Y e Y' são semelhantes pois tem como origem o ponto O . Na imagem (b) nota-se que tanto $Z-h$ e Z quanto Xh e X preservam suas dimensões mesmo após a translação. Fonte: Modificado de Facon (1996).

3.3.2 Invariância à Homotetia - Mudança de Escala

Seja o exemplo de dois pesquisadores trabalhando com a mesma amostra. Pode acontecer que esses pesquisadores trabalhem com uma ampliação diferente desta amostra. Para obter as mesmas conclusões, eles tem que achar um meio de trabalhar independentemente da ampliação usada. Para isto é necessário que a avaliação quantitativa da amostra X seja independente da redução ou da ampliação λ . Isso se traduz por (Facon, 1996):

$$\psi(\lambda(X)) = \lambda\psi(X), \quad \lambda > 0, \quad (3.14)$$

ou ainda

$$\psi(X) = \lambda\psi(X/\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (3.15)$$

A transformação ψ é então invariante por homotetia. Homotetia é a ampliação positiva ou negativa de imagens semelhantes. Tem sempre um centro de razão, de onde partem retas que irão passar por todos os pontos das outras figuras ampliadas ou reduzidas (Fig. 3.4a). Aplicar ψ à X é então igual a reduzir X , aplicar ψ e depois dilatar o resultado (Fig. 3.5a) (Facon, 1996).

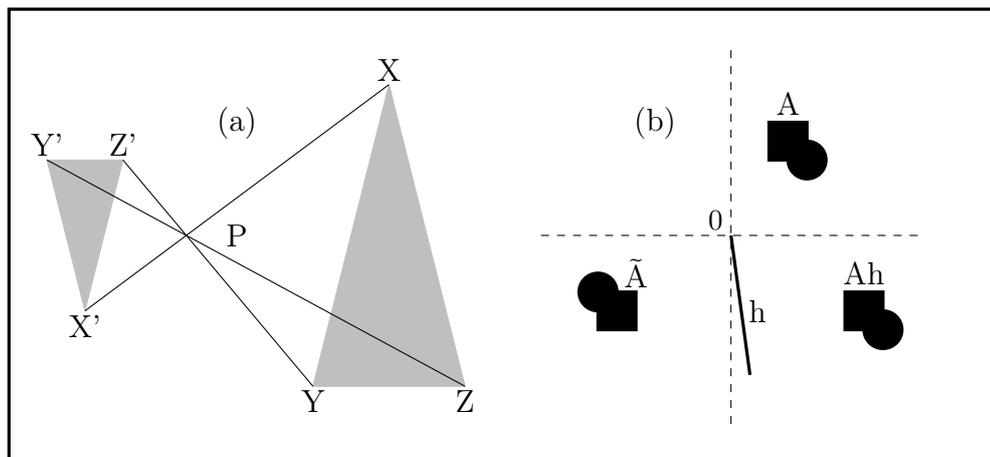


Figura 3.5: Translação e simetria. Fonte: Modificado de Facon (1996).

3.3.3 Conhecimento Local

Na realidade, quando estudamos um conjunto X , raramente temos a possibilidade de estudar o conjunto X como um todo, mas provavelmente somente uma parte desse conjunto que denominamos de Z . Exemplos disso podem ser encontrados em imagens aéreas, imagens de satélites (sensores) ou imagens microscópicas. Não conhecemos o conjunto X mas em realidade $X \cap Z$ (e claro o conjunto Z). Nestas condições, as transformações ψ usadas serão aplicadas sobre uma máscara Z' provendo do subconjunto Z onde é conhecido X . A máscara Z' depende somente de Z e $X \cap Z$ (Fig. 3.6). Isto representa o

terceiro princípio da morfologia matemática: *A transformação ψ satisfaz a propriedade de conhecimento local se para cada conjunto restrito Z' no qual X é conhecido, nós podemos encontrar um conjunto restrito Z no qual o conhecimento de X é suficiente para aplicar localmente (através de Z') a transformação ψ* (Facon, 1996):

$\forall Z'$ restrito, $\exists Z$ restrito tal como ,

$$[\psi(X \cap Z)] \cap Z' = \psi(X) \cap Z' . \quad (3.16)$$

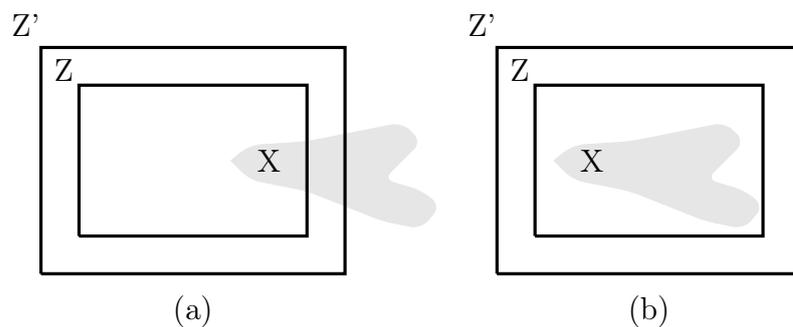


Figura 3.6: Conhecimento local: a condição não é satisfeita em a), mas é satisfeita em b).
Fonte: Modificado de Barrera (1987).

A Figura 3.6 mostra dois exemplos que ilustram a ideia de conhecimento local. Na Figura 3.6a a condição de conhecimento local não é satisfeita. Por outro lado, na Figura 3.6b a condição de conhecimento local é satisfeita (Facon, 1996).

3.3.4 Semi-Continuidade

Devido a possibilidade de ocorrência de flutuações na representação dos alvos, as transformações não devem ser sensíveis aos detalhes mais finos que os alvos estudados possuem. Assim, para qualquer transformação de aumento ψ e uma sequência decrescente de conjuntos fechados X_i tendendo a um limite X , a sequência de conjuntos transformados $\psi(X_n)$ deve tender a $\psi(X)$. Isto é (Serra, 1982):

$$\left. \begin{array}{l} X \subset Y \rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y) \\ X_i \rightarrow X \end{array} \right\} \psi(X_i) \rightarrow \psi(X). \quad (3.17)$$

Essa condição garante a semi-continuidade das transformações, obtendo-se assim resultados semelhantes para transformações de objetos de formas próximas (Serra, 1982).

3.4 OPERAÇÕES UTILIZADAS NA MORFOLOGIA MATEMÁTICA

No tratamento dos pixels das imagens são utilizadas operações de conjunto e suas combinações. Listamos algumas operações utilizadas na morfologia matemática:

- Operações com conjuntos:
 - Reflexão
 - União
 - Intersecção
 - Subtração
 - Soma vetorial
 - Diferença vetorial
 - Translação
 - Simetria
- Combinações de operações:
 - Erosão x Dilatação
 - Esqueletonização
 - Combinações das anteriores
 - Abertura x Fechamento

3.5 MORFOLOGIA MATEMÁTICA BINÁRIA

A morfologia matemática representa um ramo não linear das técnicas de processamento de imagens. De uma forma geral, a análise de imagens necessita da extração de parâmetros. Podemos dizer que atrás de qualquer parâmetro, foi usada uma transformação de imagens. Um bom exemplo disso é o cálculo da área de uma entidade digital. Calcular a área consiste em verificar o número de pontos contidos nesta entidade. Esta operação pode ser interpretada pela quantidade de vezes que um ponto teste, percorrendo a imagem, encontra a entidade estudada (Facon, 1996).

As propriedades básicas da morfologia matemática foram criadas a partir das noções de soma e subtração das operações de Minkowski, introduzidas, respectivamente, por Minkowski (1903); Hadwiger (1950, 1957). As transformações produzidas nas imagens binárias (i.e., cujos pixels podem tomar apenas os valores 0 e 1) pelas dilatações e erosões dependem de padrões predefinidos, chamados elemento estruturante, que as sondam localmente (Banon e Barrera, 1994).

3.5.1 Aspecto Digital

Deste ponto em diante, B representará o elemento estruturante, noção introduzida anteriormente. Nas diferentes transformações, B_x representa o elemento estruturante B centrado no pixel x . Em função do contexto e por necessidade de simplificação, B_x poderá simplesmente ser denotado como B . Um elemento estruturante é definido pelos pixels que o formam (Fig. 3.7) e que são representados por “.” e por “●”. Um pixel marcado como “.” é um pixel inativo ou neutro, quer dizer que ele não interage com o conjunto X . O pixel “.”, simplesmente, aparecerá no elemento estruturante para visualizar o seu aspecto geométrico. Um pixel marcado como “●” significa um pixel ativo que tem um papel a desenvolver na interação com a imagem X (Facon, 1996).

Os pixels “●” do elemento estruturante criam um subconjunto que vai interagir com a imagem X . O resultado dessa interação é colocado numa posição específica, a do ponto central PC do elemento estruturante, na imagem no momento da ação. O símbolo “()” representará este PC no elemento estruturante (Facon, 1996). Na forma digital B é representado em “{ }” como na Figura 3.7 (Facon, 1996).

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{array} \right\}$$

Figura 3.7: Representação do elemento estruturante. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Na maioria dos exemplos apresentados, o ponto central do elemento estruturante corresponderá ao seu centro físico. Em função do contexto e por necessidade de simplificação, o símbolo “()” será omitido (Fig. 3.8) (Facon, 1996).

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{array} \right\}$$

Figura 3.8: Representação do elemento estruturante. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Muitas vezes será necessário introduzir o elemento estruturante transposto \tilde{B} (veja a Fig. 3.9) (Facon, 1996):

$$\text{Se } B = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{array} \right\} \text{ então } \tilde{B} = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\}$$

Figura 3.9: Representação do elemento estruturante e seu transposto. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Os elementos estruturantes mais utilizados na morfologia matemática binária são (veja a Fig. 3.10) (Facon, 1996):

$$\begin{aligned} \text{horizontal } B_H &= \left\{ \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\}, \text{ vertical } B_V = \left\{ \begin{array}{ccc} \vdots & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \vdots \end{array} \right\}, \text{ cruz } B_C = \left\{ \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \bullet & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right\}, \\ \text{quadrado } B_Q &= \left\{ \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right\}, \text{ Rhombus } B_R = \left\{ \begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Figura 3.10: Representação dos tipos mais conhecidos de EE . Fonte: Modificado de Facon (1996).

Da mesma maneira, por ser binária, a imagem digital X contém dois tipos de informação, o fundo (representado por “.”) e os pixels relevantes (representados por “•”). Na forma digital, a imagem X é representada entre “[]”, da seguinte forma (Fig. 3.11) (Facon, 1996):

$$X = \left[\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

Figura 3.11: Representação do conjunto X . Fonte: Modificado de Facon (1996).

3.5.2 Operadores Elementares

Um primeiro conceito fundamental de morfologia matemática é o de relação de ordem parcial. Seja \mathcal{E} um conjunto não vazio. A relação habitualmente usada no caso de subconjuntos de \mathcal{E} é a de inclusão que permite comparar certos subconjuntos entre si. Seja $P(\mathcal{E})$ a coleção de todos os subconjuntos de \mathcal{E} associada com a relação de inclusão \subset . $P(\mathcal{E})$ representa um conjunto parcialmente ordenado, denotado por $(P(\mathcal{E}), \subset)$. Banon e Barrera (1994) demonstraram que qualquer operador pode ser decomposto a partir de quatro classes fundamentais de operadores, chamados de operadores elementares, que são a erosão, a anti-erosão, a dilatação e a anti-dilatação (Facon, 1996).

Definição 3.1. Um operador ψ é uma:

- dilatação se e somente se, para todo $X \subset P$, $\psi(\sup X) = \sup(\psi(X))$;
- erosão se e somente se, para todo $X \subset P$, $\psi(\inf X) = \inf(\psi(X))$;
- anti-dilatação se e somente se, para todo $X \subset P$, $\psi(\sup X) = \inf(\psi(X))$;
- anti-erosão se e somente se, para todo $X \subset P$, $\psi(\inf X) = \sup(\psi(X))$.

3.5.3 Erosão Binária

Serra (1982) define a operação de erosão binária \ominus da seguinte maneira:

Definição 3.2. A erosão de um conjunto A pelo elemento estruturante B é:

$$(A \ominus B)(x) = \{x \in A \mid B_x \subset A\}. \quad (3.18)$$

Esta Definição 3.18 pode ser escrita como na Equação 3.12 e aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh (Kerre e Nachtgeael, 2000), tem-se:

$$\bigcap_{i \in I} A_i(x) = \inf_{i \in I} A_i(x). \quad (3.19)$$

Segundo a Definição 3.2, deve-se transladar (deslizar) o elemento estruturante B sobre a imagem A (Fig. 3.12) e para cada pixel x verificar a configuração de sua vizinhança em relação à estrutura do elemento estruturante B . Por ser binária, a imagem A contém dois tipos de informação, o fundo (representado por “.”) e os pixels relevantes (representado por “•”). O significado da Definição 3.2 é que o elemento estruturante B_x , posicionado e centrado no pixel x de A , tenta aparelhar-se com a vizinhança de x . Entende-se que cada pixel relevante de B_x deve encontrar-se na mesma posição na vizinhança de x . Caso seja verificado, o pixel x na imagem erodida será considerado um pixel relevante e será preservado. Caso contrário, ele será considerado como irrelevante e será apagado (Fig. 3.12) (Facon, 1996).

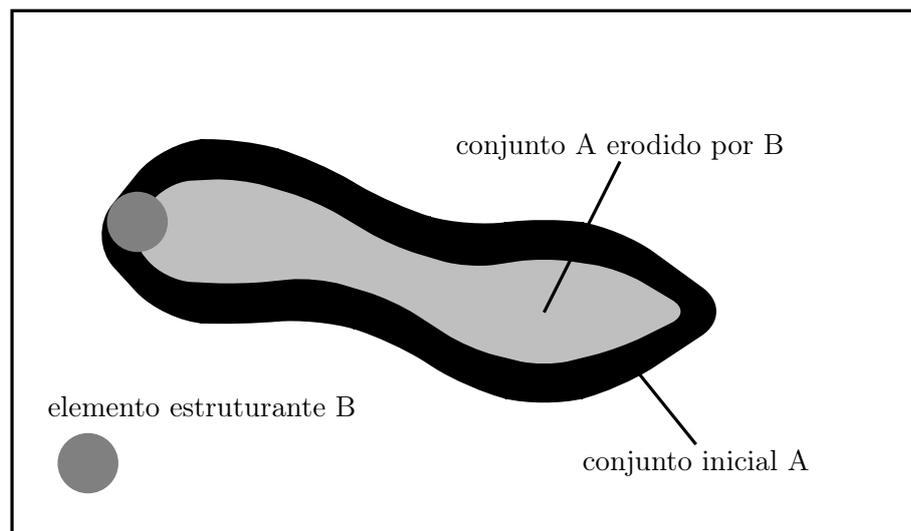


Figura 3.12: Representação da erosão binária baseado na Definição 3.2. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Vejamos a erosão do conjunto A (imagem) pelo conjunto B (elemento estruturante) definidos a seguir (Fig. 3.13):

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{ e } B = \left\{ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right\}$$

Figura 3.13: Representação do conjunto A e do elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

Por simplificação, o ponto central PC no elemento estruturante B que não estará marcado, será o centro físico do conjunto B . Em cada posição x de A , deve ser posicionado B , virando assim B_x . Podemos ver imediatamente que nos pixels das bordas de A , B_x está parcialmente fora. A aplicação da Definição 3.2 não pode ser rigorosamente seguida. Este fato ocorrerá sempre porque a borda de uma imagem é por definição descontínua. Portanto, em todo o trabalho, as bordas serão ignoradas e as imagens A serão escolhidas de maneira a não fazer aparecer pixels relevantes nas mesmas (Facon, 1996).

No primeiro caso onde x é apontado com “[]”, B_x não se aparelha com a vizinhança de x . Os pontos relevantes de B não coincidem com os pixels relevantes da vizinhança de x . Então, o x não pertence ao resultado parcial do conjunto erodido, e vira um pixel irrelevante (Fig. 3.14) (Facon, 1996).

$$\left[\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] []$$

Figura 3.14: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

No segundo caso, x apontado com “[]”, B_x se aparelha com a vizinhança de x . Os pontos relevantes de B coincidem com os pixels relevantes da vizinhança de x . Então, o x pertence ao conjunto erodido, e vira um pixel relevante (Fig. 3.15) (Facon, 1996).

$$\left[\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] [\cdot]$$

Figura 3.15: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

Como resultado final tem-se (Fig. 3.16):

$$\left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [\cdot] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

Figura 3.16: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

O PC tem a função de definir a posição do resultado da erosão de A por B . Se mudarmos a posição do PC no elemento estruturante o seguinte resultado é observado na Figura 3.17 (Facon, 1996):

$$A = \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ e } B = \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\}$$

Figura 3.17: Representação do conjunto A e do elemento estruturante B com o PC deslocado. Fonte: Modificado de Facon (1996).

No primeiro caso onde x é apontado com “[]”, B_x se aparelha com a vizinhança de x . Então, o ponto x vira um pixel irrelevante (veja Fig. 3.18) (Facon, 1996).

$$\left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [\cdot] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

Figura 3.18: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B com o PC deslocado. Fonte: Modificado de Facon (1996).

No segundo caso, x apontado com “[]”, B_x se aparelha com a vizinhança de x . Os pontos relevantes de B coincidem com os pixels relevantes da vizinhança de x . Então, o x pertence ao conjunto erodido, e vira um pixel relevante (veja a Fig. 3.19) (Facon, 1996).

$$\left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [\cdot] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

Figura 3.19: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B com o PC deslocado. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Como resultado final tem-se (Fig. 3.20):

$$\left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \text{ero} \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

Figura 3.20: Representação da erosão do conjunto A pelo elemento estruturante B com o PC deslocado. Fonte: Modificado de Facon (1996).

Podemos constatar que o conjunto obtido na Figura 3.20 é idêntico ao obtido na Figura 3.16. A única diferença ocorre na posição do resultado, ou seja, se a posição do PC do elemento estruturante for deslocada a imagem resultante sofrerá uma translação (Facon, 1996).

3.5.4 Dilatação Binária

Serra (1982) define a operação de dilatação binária \oplus da seguinte maneira (Facon, 1996):

Definição 3.3. A dilatação de um conjunto A pelo elemento estruturante B é:

$$(A \oplus B)(x) = \{x \in A \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}. \quad (3.20)$$

Esta Definição 3.20 pode ser escrita como na Equação 3.9 e aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh (Kerre e Nachtgeael, 2000), tem-se:

$$\bigcup_{i \in I} A_i(x) = \sup_{i \in I} A_i(x). \quad (3.21)$$

As duas operações, erosão e dilatação, são portanto duais e a interpretação da dilatação é complementar da interpretação da erosão. O complemento da proposição “ B_x está incluído em A ” é a proposta “a intersecção de B_x e A não é vazia” (Fig. 3.21) (Facon, 1996).

Segundo a definição 3.3, o elemento estruturante B deve deslizar sobre a imagem A (Fig. 3.21). O significado é que o elemento estruturante B_x , posicionado e centrado em cada pixel x de A , verifica uma intersecção com a vizinhança de x . Caso seja verdadeiro, o PC na imagem resultado será um pixel relevante (\bullet). Caso contrário, ele será considerado como irrelevante (\cdot) (Facon, 1996). Vejamos a dilatação da imagem A pelo elemento estruturante B definidos a seguir (Fig. 3.22):

B é posicionado em cada posição x de A , virando assim B_x . Podemos ver imediatamente que nos pixels das bordas de A , não há pixels relevantes. Desta maneira evita-se

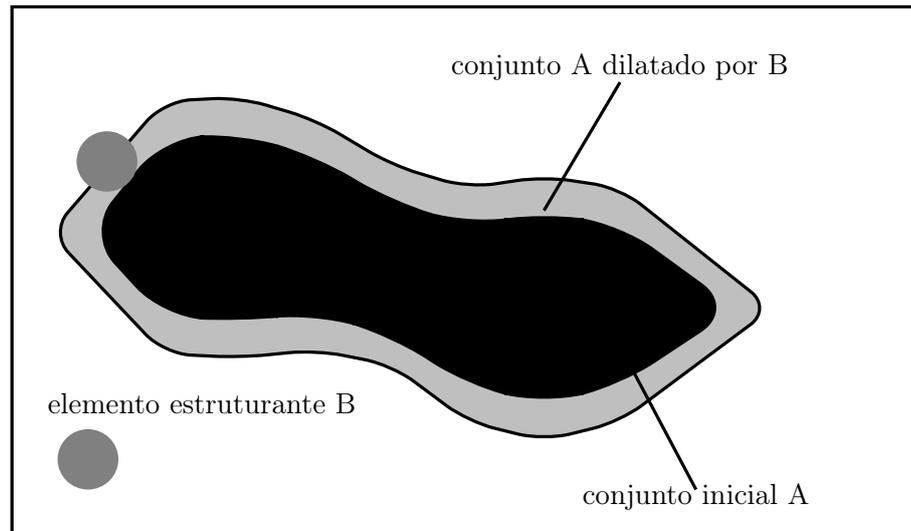


Figura 3.21: Representação da dilatação binária baseado na definição 3.3. Fonte: Modificado de Facon (1996).

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{ e } B = \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\}$$

Figura 3.22: Representação do conjunto A e do elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

a ambiguidade nelas. No primeiro caso onde x é apontado com “[]”, os pontos relevantes de B_x não tem intersecção com os pixels correspondentes na vizinhança de x . Então, na posição atual do PC de B_x em A , é colocado um pixel irrelevante como visto na Figura 3.23 (Facon, 1996).

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{ dil } \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Figura 3.23: Representação da dilatação do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

No segundo caso, x apontado com “[]”, B_x chega a ter pelo menos intersecção com os pixels correspondentes na vizinhança de x . Pelo menos, um ponto relevante de B coincide com um pixel relevante da vizinhança de x . Então, o x pertence ao conjunto dilatado, e vira um pixel relevante (veja a Fig. 3.24) (Facon, 1996).

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{dil} \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Figura 3.24: Representação da dilatação do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

Como resultado final tem-se (Fig. 3.25):

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{dil} \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Figura 3.25: Representação da dilatação do conjunto A pelo elemento estruturante B . Fonte: Modificado de Facon (1996).

3.6 MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM NÍVEIS DE CINZA

Posteriormente, as ideias estabelecidas para operadores sobre conjuntos foram estendidas para operadores sobre funções (i.e., imagens em níveis de cinza). A ligação entre os conceitos aplicados a subconjuntos e os conceitos aplicados a funções estabeleceu-se pelo conceito de sombra de uma função (i.e., lugar geométrico dos pontos situados abaixo do gráfico da função). As erosões e dilatações aplicadas a uma função têm uma relação um para um com erosões e dilatações aplicadas à sombra desta mesma função. Dadas as definições de erosão e dilatação entre funções, pode-se construir uma série de operadores análogos aos conhecidos para subconjuntos (Banon e Barrera, 1994).

A noção de Umbra foi o ponto de partida para Sternberg (1981) e Serra (1982) definir os operadores morfológicos em níveis de cinza.

3.6.1 Noção de Umbra

Umbra significa sombra, e umbra de um conjunto A no espaço 3-D inclui ao mesmo tempo A e o volume dos pontos na sua sombra. Matematicamente falando, a umbra é definida como um sólido tridimensional que se estende contínua e indefinidamente na direção negativa do eixo z . A umbra pode ser formada por uma fonte de luz pontual a uma distância infinita na direção positiva do eixo z . Um único parâmetro define uma umbra tridimensional: a altura z nas coordenadas (x, y) . A noção de umbra (Sternberg, 1981) é a ligação entre as funções $f \in F_u(\mathbb{R}^2)$ e os conjuntos fechados $Y \in F(\mathbb{R}^3)$ do

espaço. Pontos do \mathfrak{R}^3 são parametrizados pelas suas projeções p sobre o \mathfrak{R}^2 e suas alturas z sobre o eixo perpendicular a \mathfrak{R}^2 . A umbra $U(Y)$, $Y \in F(\mathfrak{R}^3)$, é o dilatado de Y pelo eixo positivo $[0, +\infty]$ dos z , seja:

$$\begin{aligned}
 U(Y) &= Y \text{ dil}[0, +\infty] \\
 &= Y \oplus [0, +\infty]^c \\
 &= Y \ominus [0, -\infty] \\
 &= \{(p, z') : (p, z) \in Y; z' \leq z\}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dada uma função $f \in F_u$, o conjunto:

$$U(f) = \{(p, z), p \in \mathfrak{R}^2, z \in \mathfrak{R} : f(p) \geq z\}, \tag{3.23}$$

é por construção uma umbra. Na literatura podemos encontrar o nome sub-grafo para a função $U(f)$.

Dessa transformação, Serra (1982) extraiu operações importantes. De uma forma geral, podemos dizer já que os operadores atuam sobre funções reais definidas no espaço euclidiano de dimensão N . no caso de sinais, N é igual a 1, e para imagens, $N = 2$. Apesar de nosso escopo ser a morfologia matemática sobre imagens com níveis de cinza, introduziremos a “teoria em níveis de cinza” sobre sinais de tal maneira a definir a conceituação geral (Facon, 1996).

3.6.2 Considerações matemáticas

Seja E um conjunto qualquer e $P(E)$ o conjunto dos subconjuntos de E . Um sinal euclidiano é uma função $f(x)$ definida num certo domínio $D[f(x)]$ que pode ser real ou inteiro. Considerando uma função de uma variável $f(x)$ positiva, o que é o caso de imagens com níveis de cinza, podemos definir o grafo $G(x)$ dessa função em \mathfrak{R}^2 como (Facon, 1996):

$$G(x) = \{x, t : t = f(x)\}. \tag{3.24}$$

O conjunto constituído pelo grafo $G(x)$ e dos pontos localizados abaixo desse está definido um outro conjunto, U_f , chamado de sub-grafo da função $f(x)$. Seja:

$$U_f(x) = \{x, t : t \leq f(x)\}, \tag{3.25}$$

Conhecendo o sub-grafo U_f , é possível conhecer $f(x)$. Para isso, podemos definir o grafo $G(x)$ desta função da seguinte maneira (Facon, 1996):

$$G(x) = \mathbf{max} \{t : x, t \in U_f\}, \tag{3.26}$$

onde a operação **max** significa a obtenção do valor máximo (Eq. 3.26).

Qualquer operação morfológica leva em consideração operações de translação, subconjuntos e união sobre grafo $G(x)$ de $f(x)$. Uma translação horizontal à direita do valor z , ou “shift”, do sinal $f(x)$ pode ser definida como (Facon, 1996):

$$f_z(x) = f(x - z). \quad (3.27)$$

Da mesma maneira, uma translação vertical do sinal $f(x)$ de valor y , chamada também de “offset”, pode ser definida como:

$$(f + y)(x) = f(x) + y. \quad (3.28)$$

Aplicando as duas operações (eq. 3.27 e 3.28), obtemos uma translação morfológica, como (Facon, 1996):

$$(f + y)_z(x) = f(x - z) + y. \quad (3.29)$$

Precisamos definir uma noção de ordem entre as imagens. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois sinais com domínios respectivos $D[f]$ e $D[g]$, $g(x)$ é declarado como sendo abaixo de $f(x)$, escrito como $g \ll f$, se (Facon, 1996):

- o domínio $D[g]$ é um subconjunto do domínio $D[f]$;
- $\forall x \in D[g]$, $g(x) < f(x)$.

Em morfologia binária, a intersecção e a união tem um papel importante. Da mesma forma, vamos definir em morfologia cinza duas funções equivalentes, o máximo (representado pelos símbolos \vee ou **max**) e o mínimo (representado pelos símbolos \wedge ou **min**) (Fig. 3.26).

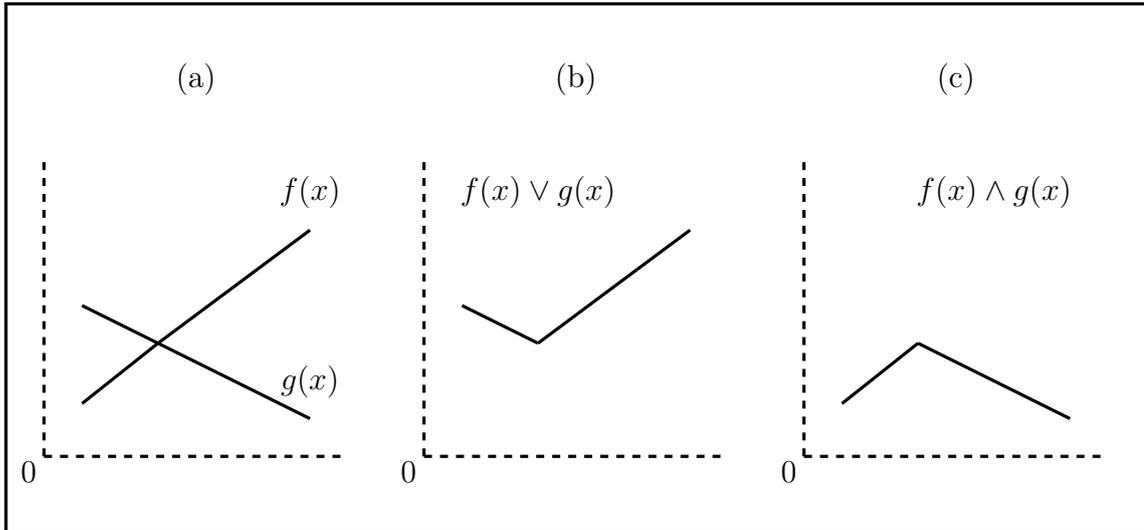


Figura 3.26: Representação das operações Máximo e Mínimo. Fonte: Modificado de Facon (1996).

O mínimo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, notado $f \wedge g$, pode ser definido da seguinte forma (Facon, 1996):

Definição 3.4. Se x pertence à intersecção de $f(x)$ e de $g(x)$, x pertence então à $D[f] \cap D[g]$, portanto:

$$(f \wedge g)(x) = \mathbf{min} \{f(x), g(x)\}. \quad (3.30)$$

Da mesma maneira, o máximo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, notado $f \vee g$, pode ser definido em termos de união da seguinte forma:

Definição 3.5. Se x pertence à união de $f(x)$ e de $g(x)$, x pertence então à $D[f] \cup D[g]$, então:

$$(f \vee g)(x) = \mathbf{max} \{f(x), g(x)\}. \quad (3.31)$$

Em morfologia cinza, existe mais uma operação básica de reflexo que corresponde à rotação de um conjunto em relação a origem. Se $f(x)$ é um sinal definido no seu domínio $D[f]$, o transposto de $f(x)$ em relação à origem é (Facon, 1996):

$$\tilde{f}(x) = -f(-x). \quad (3.32)$$

3.6.3 Erosão em níveis de Cinza

Conhecendo o sub-grafo U_f da função $f(x)$, podemos definir o novo conjunto U_{e_f} , resultado da erosão em níveis de cinza de U_f , a partir de um elemento estruturante centrado g , da seguinte maneira (Facon, 1996):

$$U_{e_f}(x) = U_f(x) \ominus g(x). \quad (3.33)$$

Ao sub-grafo U_{e_f} corresponde a função $f_e(x)$ cujo grafo $G_e(x)$ é:

$$G_e(x) = \mathbf{max} \{t : x, t \in U_{e_f}\}. \quad (3.34)$$

Para simplificar, podemos então escrever que:

$$f_e(x) = f(x) \ominus g(x). \quad (3.35)$$

Como em morfologia binária, na prática, a erosão em níveis de cinza de f por g consiste em verificar se o elemento estruturante centrado em x está abaixo da função f . Serra (1982) mostrou que é possível relacionar a erosão com a extensão da subtração de Minkowski estendida para funções (Facon, 1996):

Definição 3.6. A erosão de um sinal f por um elemento estruturante g é:

$$f(x) \ominus g(x) = \mathbf{min} \{f(y) - g(x - y) : y \in \mathcal{E}\}, \quad (3.36)$$

onde a erosão não é definida num ponto onde o elemento estruturante não está abaixo do sinal f .

No caso de imagens digitais, os sinais são definidos sobre inteiros e tomam os valores de nível de cinza, na maioria dos casos entre 0 e 255 (8 bits). A Figura 3.27 ilustra o princípio da interação do elemento estruturante g em níveis de cinza sobre o sinal f no caso de uma erosão em níveis de cinza. O ponto escolhido para a exemplificação é $x = 2$. Nesse ponto, são efetuadas todas as operações $f(y) - g(x - y)$ para os pontos relevantes y do elemento estruturante g . Podemos constatar que o elemento estruturante g é centrado no ponto 2 em estudo ($2 - y = 0$ para $y = 2$) (Fig. 3.27). O cálculo $f(y) - g(2 - y)$ deve ser efetuado três vezes para os pontos relevantes de g que são $y = 1$, $y = 2$ e $y = 3$. Os resultados são respectivamente $1 - 1 = 0$, $2 - 1 = 1$ e $3 - 1 = 2$. Portanto o resultado da erosão no ponto 2 é o $\mathbf{min}\{0, 1, 2\} = 0$. Os resultados da erosão de f por g são mostrados

na Figura 3.27:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^g(f(0)) &< 0, \quad \epsilon^g(f(1)) < 0, \quad \epsilon^g(f(2)) = 0 \\
 \epsilon^g(f(3)) &= 1, \quad \epsilon^g(f(4)) = 2, \quad \epsilon^g(f(5)) = 1 \\
 \epsilon^g(f(6)) &= 0, \quad \epsilon^g(f(7)) < 0, \quad \epsilon^g(f(8)) < 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

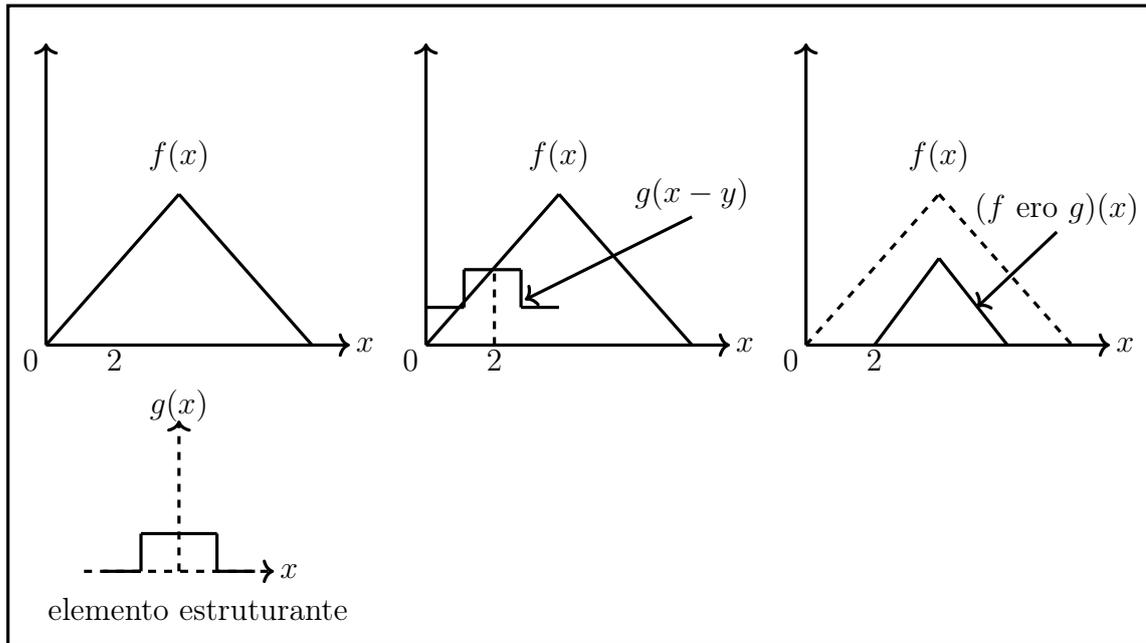


Figura 3.27: Representação gráfica da erosão em níveis de cinza. Fonte: Modificado de Facon (1996).

A Equação 3.36 pode ser escrita considerando o par ordenado (x, y) , como:

$$(f \ominus g)(x, y) = \mathbf{min}_{i, j \in B} \{f(x + i, y + i) - g(i, j)\}.
 \tag{3.38}$$

Uma imagem, de forma geral, apresenta um fundo que pode ser ou não uniforme e onde sobrepõem-se padrões mais claros e/ou escuros. Podemos comparar esta afirmação a um relevo topográfico onde os padrões claros são picos e os padrões escuros são vales. Tendo esta analogia na mente, podemos estabelecer padrões de comportamento da erosão (Facon, 1996).

3.6.4 Dilatação em níveis de Cinza

A dilatação de um sinal f por um elemento estruturante g pode ser definida, como no caso da morfologia binária, como uma operação dual da erosão em níveis de cinza. A dilatação em níveis de cinza de U_f, U_{d_f} , a partir de um elemento estruturante g , é definida

da seguinte maneira (Facon, 1996):

$$U_{d_f}(x) = U_f(x) \oplus g(x). \quad (3.39)$$

Ao sub-grafo U_{d_f} corresponde a função $f_d(x)$ cujo grafo $G_d(x)$ é:

$$G_d(x) = \mathbf{min}\{t : x, t \in U_{d_f}\}. \quad (3.40)$$

Para simplificar, podemos então escrever que:

$$f_d(x) = f(x) \oplus g(x). \quad (3.41)$$

Na prática, a dilatação em níveis de cinza de f por g consiste em verificar se o elemento estruturante centrado em x está acima da função f . Serra (1982) mostrou que é possível relacionar a dilatação com a extensão da adição de Minkowski estendida para funções (Facon, 1996):

Definição 3.7. A dilatação de um sinal f por um elemento estruturante g é:

$$f(x) \oplus g(x) = \mathbf{max}\{f(y) + g(x - y) : y \in \mathcal{E}\}, \quad (3.42)$$

A Figura 3.28 ilustra o princípio da interação do elemento estruturante g em níveis de cinza sobre o sinal f no caso de uma dilatação em níveis de cinza. O ponto escolhido para a exemplificação no sinal f é $x = 2$. Nesse ponto são efetuadas todas as operações $f(y) + g(x - y)$ para os pontos relevantes y do elemento estruturante g (Fig. 3.28). Podemos constatar que o elemento estruturante g é centrado no ponto 2 em estudo ($2 - y = 0$ para $y = 2$). O cálculo $f(y) + g(2 - y)$ deve ser efetuado três vezes para os pontos relevantes de g que são $y = 1$, $y = 2$ e $y = 3$. Os resultados são respectivamente $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ e $3 + 1 = 4$. Portanto o resultado da dilatação no ponto 2 é o $\mathbf{max}\{2, 3, 4\} = 4$. Os resultados da erosão de f por g são mostrados na Figura 3.28 (Facon, 1996):

$$\begin{aligned} \delta^g(f(0)) &= 2, \quad \delta^g(f(1)) = 3, \quad \delta^g(f(2)) = 4 \\ \delta^g(f(3)) &= 5, \quad \delta^g(f(4)) = 5, \quad \delta^g(f(5)) = 5 \\ \delta^g(f(6)) &= 4, \quad \delta^g(f(7)) = 3, \quad \delta^g(f(8)) = 2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

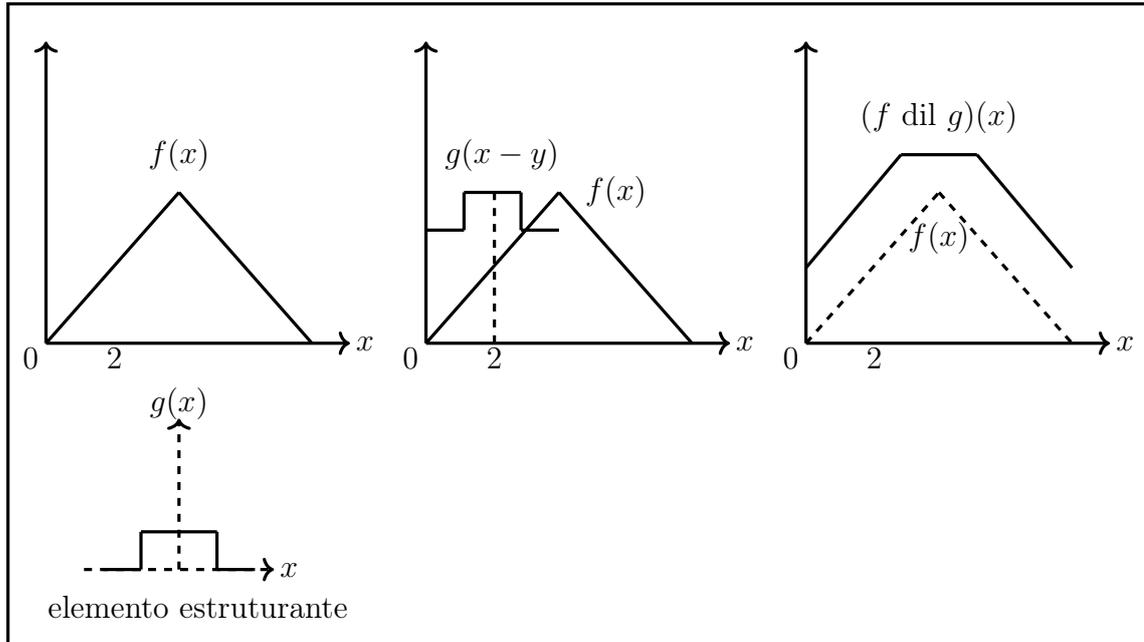


Figura 3.28: Representação gráfica da dilatação em níveis de cinza. Fonte: Modificado de Facon (1996).

A Equação 3.42 pode ser escrita considerando o par ordenado (x, y) , como:

$$(f \oplus g)(x, y) = \max_{i, j \in B} \{f(x + i, y + i) + g(i, j)\}. \quad (3.44)$$

Explorando a propriedade de dualidade entre a erosão e a dilatação em níveis de cinza, podemos escrever:

$$f \oplus g = -[(-f) \ominus (-\tilde{g})]. \quad (3.45)$$

Tendo ainda na mente a analogia da imagem em níveis de cinza com o relevo topográfico onde os padrões claros são picos e os escuros são vales, é possível determinar padrões de comportamento da dilatação (Facon, 1996).

3.7 MORFOLOGIA MATEMÁTICA FUZZY

A palavra fuzzy, de origem inglesa, significa: incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso, etc. A teoria dos conjuntos difusos ou lógica difusa vem se desenvolvendo, ganhando espaço e está sendo usada como ferramenta para a formulação de modelos nos vários campos das ciências. A lógica fuzzy é a lógica baseada na teoria dos conjuntos fuzzy. Essa foi criada por volta de 1920 quando um polonês chamado Jan Lukasiewicz (1878-1956) utilizando-se do princípio da incerteza apresentou pela primeira vez as noções da lógica dos conceitos vagos na qual é admissível um conjunto com valores não precisos (Lukasiewicz e Borkowski, 1970a,b). Porém, estes conceitos só ficaram conhecidos quando

a teoria foi introduzida pelo matemático Zadeh (1965), com a intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos como: “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros. Pode-se dizer que a teoria dos conjuntos fuzzy representa um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano.

Sinha e Dougherty (1992) propuseram uma extensão da morfologia matemática binária aplicada nas imagens em tons de cinza, com base na teoria dos conjuntos fuzzy, relacionada com a álgebra fuzzy de Minkowski. A álgebra fuzzy de Minkowski, foi desenvolvida com ênfase na caracterização da erosão e abertura fuzzy em Sinha e Dougherty (1992), examinando as propriedades-chaves e estendendo a noção binária de Matheron (1975). Um estudo comparativo realizado por Bloch e Maître (1994) definiu quais as condições básicas para a construção da morfologia fuzzy. Demonstraram a utilização de elementos estruturantes fuzzy e descreveram os operadores erosão e dilatação fuzzy com suas propriedades em detalhes.

A morfologia matemática fuzzy provém da extensão da morfologia binária utilizando a lógica fuzzy. Baets et al. (1995) apresentaram as definições dos operadores morfológicos erosão, dilatação, abertura e fechamento originados de Serra (1982) e a relação entre os operadores erosão e dilatação. Um tempo depois, Baets (1998) apresentou a possibilidade da abordagem da lógica fuzzy para morfologia matemática, considerando que, os operadores de dilatação e erosão são apresentados de forma independente e baseados nos conectivos lógicos de conjunção “e” e implicação “ou”.

Nachtegaele e Kerre (2001) discutiram várias abordagens novas e conhecidas no sentido da morfologia fuzzy e demonstraram como as abordagens estão interligadas, não só entre si, mas também para morfologia binária e em escala de cinza clássicas. Dessa forma, estabeleceram que a morfologia matemática fuzzy é uma extensão da morfologia binária à morfologia em escala de cinza, utilizando técnicas de teoria dos conjuntos fuzzy (Nachtegaele e Kerre, 2001).

Existem várias formas de estender a morfologia das imagens binárias para as imagens em tons de cinza. Deng e Heijmans (2002), combinaram duas abordagens, lógica fuzzy e adjunções, onde desenvolveram um trabalho que formulou novos operadores morfológicos usando implicações e conjunções que formam adjunções. Bloch (2009) estabeleceu a ligação entre as duas principais abordagens para a morfologia matemática fuzzy. Uma baseada na dualidade em relação à complementação. Outra, na propriedade de adjunção. Além disso, apresentou as definições de erosão e dilatação fuzzy com conjuntos clássicos.

Shi et al. (2009) fizeram um estudo sobre as adjunções fuzzy e a importância das implicações e conjunções nesta construção e, além disso, propuseram um teorema onde a conjunção que forma uma adjunção com uma implicação não só pode gerar outras adjunções a partir de R-implicações mas também por outras implicações em Shi et al.

(2009).

Abordaremos a teoria fuzzy através do conceito de conjuntos fuzzy. Um conjunto é uma coleção de objetos que, por alguma razão, nos convém situar coletivamente como uma única entidade. Tais objetos são geralmente referidos como elementos do conjunto. Os elementos podem ser qualquer coisa como, por exemplo, livros de uma biblioteca, números, pessoas, países, etc. O importante é que um elemento ou pertence ou não pertence a um certo conjunto. Essa relação entre um conjunto e um elemento é chamada relação de pertinência do elemento baseado na função característica definido como:

Definição 3.8. (Função Característica): Seja \mathcal{E} um conjunto universo, A um subconjunto de \mathcal{E} ($A \subseteq \mathcal{E}$) e x um elemento de \mathcal{E} . Define-se a função característica como $\mu_A(x) : \mathcal{E} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad (3.46)$$

Pode-se observar que a função característica, assim definida, é um mapeamento do conjunto universo \mathcal{E} , para os elementos do conjunto $0, 1$, assumindo deste modo apenas valores discretos e dividindo o conjunto universo em duas partes com fronteiras bem definidas.

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida por Zadeh (1965), surgiu como um meio de representação e manipulação de dados imprecisos, e são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas como na teoria usual de conjuntos. Estes foram propostos pelo fato dos conjuntos clássicos apresentarem limitações para lidar com problemas onde transições (passagem de pertinência para a não pertinência) de uma classe para outra acontecem de forma lenta e gradual.

Zadeh (1973) propôs uma caracterização mais ampla, generalizando a função característica de maneira que esta pudesse assumir um número infinito de valores no intervalo $[0, 1]$, sugerindo que alguns elementos são mais membros de um conjunto do que outros. Neste caso, o grau de pertinência pode assumir qualquer valor no intervalo fechado $[0, 1]$, sendo o valor 0 usado para representar não-pertinência completa, o valor 1 usado para representar pertinência completa, e os valores entre 0 e 1 usados para representar os graus intermediários de pertinência do subconjunto A . Esta generalização, faz com que a função característica passe a ser contínua no seu domínio, aumentando o poder de expressão da função característica.

3.7.1 Conceitos e Fundamentos

Na teoria dos conjuntos fuzzy, a ideia da função da inclusão é flexibilizada, a qual indica que um determinado elemento pertence mais ao conjunto do que outros elementos

pertencentes ao mesmo conjunto, ou seja, os elementos podem pertencer parcialmente ao conjunto. A função que define o grau de pertinência de um determinado elemento em um conjunto fuzzy, considerando o seu universo de discurso, é definida como função de pertinência. Formalmente, temos a seguinte definição:

3.7.1.1 Alfa Nível ou α -nível

Um subconjunto fuzzy A de \mathcal{E} é “formado” por elementos de \mathcal{E} com uma certa hierarquia (ordem) que é traduzida através da classificação por graus. Um elemento x de \mathcal{E} está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível $\alpha \in [0, 1]$ que define aquela classe. O conjunto clássico de tais elementos é um α -nível de A , denotado por $[A]^\alpha$.

Definição 3.9. Seja A um subconjunto fuzzy \mathcal{E} e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de \mathcal{E} , ou seja, o conjunto dos elementos que pertencem a um conjunto fuzzy A , com pelo menos um grau α que é chamado conjunto α -nível ou conjunto α -cut, definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{E} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.47)$$

Esta Definição 3.9 é importante pois fornece uma outra maneira de se considerar um conjunto fuzzy. Uma vez que a função de pertinência determina completamente um conjunto fuzzy, e que seus valores pertencem ao intervalo $[0, 1]$, então um conjunto fuzzy A pode ser descrito pela união de todos os conjuntos α -níveis : $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. A importância dos conjuntos α -níveis vem do fato deles serem conjuntos clássicos e, assim sendo, muito do formalismo matemático da teoria de conjuntos fuzzy pode ser desenvolvido no espaço dos conjuntos clássicos, aproveitando inclusive resultados (teoremas, lemas, etc), já desenvolvidos na teoria clássica.

Neste trabalho, o α -nível vai tratar o grau de pertinência da escala de cinza, que vai de 0 à 255 (8 bits), onde 0 é o valor para o nível mais escuro e 255 o mais claro.

Definição 3.10. (Função de Pertinência): Seja \mathcal{E} um conjunto universo não vazio, ($\mathcal{E} \neq \emptyset$). Um conjunto fuzzy A em \mathcal{E} é caracterizado pela função de pertinência $\mu_A(x) : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ sendo $\mu_A(x)$ o grau de pertinência do elemento x no conjunto fuzzy A para cada $x \in \mathcal{E}$ (Zadeh, 1965).

Pode ser observado, da Definição 3.10, que um conjunto fuzzy A em um conjunto universo \mathcal{E} é um conjunto de pares ordenados de um elemento genérico x e seu respectivo grau de pertinência $\mu_A(x)$, e este é completamente determinado pelo conjunto de n-uplas

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in \mathcal{E}\}. \quad (3.48)$$

A família de todos os conjuntos fuzzy em \mathcal{E} é denotado por $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$. Subconjuntos fuzzy da reta real são chamados de variáveis fuzzy. A terminologia usada para denotar um conjunto fuzzy pode ser feita das seguintes formas: conjuntos fuzzy discretos ou contínuos.

3.7.1.2 Conjuntos Fuzzy Discretos

Seja um conjunto fuzzy A discreto e finito, com elementos no universo \mathcal{E} de discurso finito $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Neste caso, o conjunto fuzzy A , com suporte em \mathcal{E} , pode ser determinado enumerando os seus elementos juntamente com os seus graus de pertinências, sendo denotado por

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \quad (3.49)$$

onde a somatória se refere a operação união (disjunção) e a notação $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ se refere ao elemento x_i que pertence ao conjunto fuzzy A com grau $\mu_A(x_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Em geral por simplicidade, somente é listado no conjunto A aqueles elementos cujo grau de pertinência é diferente de zero.

3.7.1.3 Conjuntos Fuzzy Contínuos

Seja um conjunto fuzzy A contínuo, com elementos no universo de discurso \mathcal{E} . No caso contínuo, o conjunto fuzzy A é representado por

$$A = \int_{\mathcal{E}} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \quad (3.50)$$

onde o símbolo da integral denota a união de conjuntos unitários fuzzy.

Quanto ao formato das funções de pertinência, este é restrito a certa classe de funções, representadas por alguns parâmetros específicos. Os formatos mais comuns são: linear por partes (triangular ou trapezoidal, quadrática, retangular), gaussiana, sigmóide e singleton (conjuntos unitários).

Definição 3.11. Função Gaussiana: Esta função é expressa pela Eq. 3.51 e está representada na Fig. 3.29

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-k(x-m)^2} & , \text{ para } k > 1 \end{cases} . \quad (3.51)$$

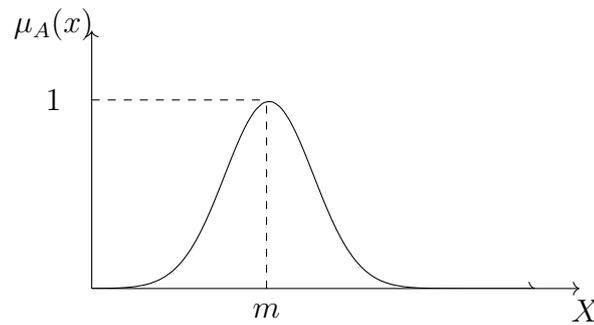


Figura 3.29: Função de pertinência do tipo gaussiana.

Definição 3.12. Função Parabólica ou Quadrática: Esta função é expressa pela Eq. 3.52 e está representada na Fig. 3.30

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , \text{ para } a > 0 \end{cases} . \quad (3.52)$$

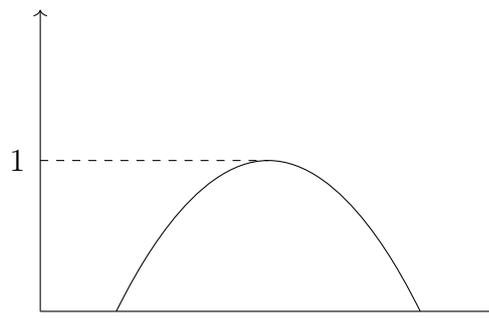


Figura 3.30: Função de pertinência do tipo parabólica.

Definição 3.13. Função Trapezoidal: Esta função é expressa pela Eq. 3.53 e está representada na Fig. 3.31

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & , \text{ se } x \in [a, m[\\ 1 & , \text{ se } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n} & , \text{ se } x \in]n, b] \\ 0 & , \text{ se } x > b \end{cases} . \quad (3.53)$$

Definição 3.14. Função Retangular: Esta função é expressa pela Eq. 3.54 e está representada na Fig. 3.32

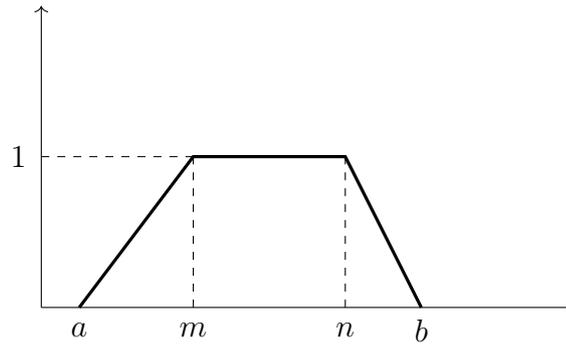


Figura 3.31: Função de pertinência do tipo trapezoidal.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & , \text{ se } x = a \\ 1 & , \text{ se } x \in [a, b] \\ \frac{b-x}{b-n} & , \text{ se } x = b \\ 0 & , \text{ se } x > b \end{cases} . \quad (3.54)$$

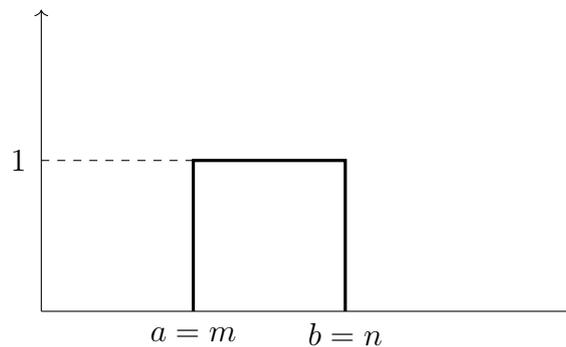


Figura 3.32: Função de pertinência do tipo retangular.

A escolha do formato da função de pertinência mais adequada nem sempre é óbvia, podendo inclusive não estar ao alcance do conhecimento para uma determinada aplicação (Delgado, 2002). No entanto, existem sistemas fuzzy cujos parâmetros das funções de pertinências podem ser completamente definidos por especialistas. Nestes casos, a escolha de funções triangulares e trapezoidais é mais comum, pois a ideia de se definir regiões de pertinências total, média e nula é mais intuitiva do que a especificação do valor médio e de dispersão, conceitos estes ligados às funções gaussianas. Outro conceito importante na teoria de conjuntos fuzzy é o de conjunto suporte de um conjunto fuzzy A . O conjunto suporte de um conjunto fuzzy A é o subconjunto dos pontos x de \mathcal{E} tal que a função de pertinência seja positiva. Formalmente, tem-se a seguinte definição

Definição 3.15. Conjunto Suporte: Seja \mathcal{E} um conjunto universo não vazio ($\mathcal{E} \neq \emptyset$), e A um subconjunto de \mathcal{E} ($A \subseteq \mathcal{E}$). O suporte $\text{Sup}(A)$ do conjunto fuzzy A é o conjunto

de todos os elementos tal que a função de pertinência tem valor maior que zero, ou seja, $\text{Sup}(A) = \{x \in \mathcal{E} \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Definição 3.16. Conjunto Unitário Fuzzy: Seja \mathcal{E} um conjunto universo não vazio ($\mathcal{E} \neq \emptyset$), e A um subconjunto de \mathcal{E} ($A \subseteq \mathcal{E}$), então um conjunto fuzzy A cujo conjunto suporte $\text{Sup}(A)$ é um único ponto de \mathcal{E} com $\mu_A(x) = 1$ é chamado de conjunto unitário fuzzy.

Da Definição 3.16, observa-se que o conjunto A é um conjunto unitário, e equivale a um conjunto unitário convencional, e ainda, por esta definição, os conjuntos clássicos passam a ser um caso específico na teoria dos conjuntos fuzzy.

Definição 3.17. Igualdade de Conjuntos Fuzzy: Sejam A e B subconjuntos fuzzy de um conjunto clássico \mathcal{E} . Os conjuntos fuzzy A e B são iguais, e denotados $A = B$ se e somente se $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, para todo $x \in \mathcal{E}$.

Definição 3.18. Conjunto Fuzzy Vazio: Um conjunto fuzzy de um conjunto de discurso \mathcal{E} é definido como conjunto vazio se para cada $x \in \mathcal{E}$, $\mu_\emptyset(x) = 0$.

Definição 3.19. Conjunto Universal: O maior subconjunto fuzzy no universo de discurso \mathcal{E} , chamado de conjunto fuzzy universal em \mathcal{E} , denotado por $1_{\mathcal{E}}$, é definido por $1_{\mathcal{E}}(x) = 1$, para todo $x \in \mathcal{E}$.

Definição 3.20. Centro de um Conjunto Fuzzy: Seja \mathcal{E} um conjunto universo não vazio ($\mathcal{E} \neq \emptyset$), e A um subconjunto de \mathcal{E} ($A \subseteq \mathcal{E}$). O centro de um conjunto fuzzy é definido como o conjunto de elementos $x \in \mathcal{E}$, nos quais $\mu_A(x)$ alcança seu valor máximo.

3.7.2 Operações com Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B dois conjuntos fuzzy em \mathcal{E} com suas funções de pertinência μ_A e μ_B , respectivamente. As operações de conjuntos como união, intersecção e complemento para conjuntos fuzzy são definidas através de suas funções de pertinência. Dizemos que B é um subconjunto fuzzy de A , e escrevemos $B \subset A$, se $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$, para todo $x \in \mathcal{E}$. Lembrando que a função de pertinência do conjunto (\emptyset) é dada por $\mu_\emptyset(x) = 0$, enquanto que o conjunto universo (\mathcal{E}) tem função de pertinência $\mu_{\mathcal{E}}(x) = 1$, para todo $x \in \mathcal{E}$. Logo, podemos dizer que $\emptyset \subset B$ e que $B \subset \mathcal{E}$ para todo B .

Definição 3.21. União: A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de \mathcal{E} , cuja função de pertinência é dada por (veja também a Fig. 3.33a):

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \mathbf{max} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \text{ ou} \\ \mu_A(x) \cup \mu_B(x) &= \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \end{aligned} \tag{3.55}$$

Observamos que esta definição é uma extensão do caso clássico. De fato, quando A e B são subconjuntos clássicos de \mathcal{E} temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{max} \{x_A(x), x_B(x)\} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cup B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases} \\ &= \mu_{A \cup B}(x), \quad x \in \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Definição 3.22. Intersecção: A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de \mathcal{E} , cuja função de pertinência é dada por (veja também a Fig. 3.33b):

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap B}(x) &= \mathbf{min} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ ou} \\ \mu_A(x) \cap \mu_B(x) &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Definição 3.23. Complementar de subconjunto fuzzy: O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de \mathcal{E} , cuja função de pertinência é dada por (veja também a Fig. 3.33c):

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (3.58)$$

Definição 3.24. União Total: Expressa pela Eq. 3.59

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^m A_i}(x) = \mathbf{max}_{x \in \mathcal{E}} (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x)) \quad (3.59)$$

Definição 3.25. Intersecção Total: Expressa pela Eq. 3.60

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^m A_i}(x) = \mathbf{min}_{x \in \mathcal{E}} (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_m}(x)) \quad (3.60)$$

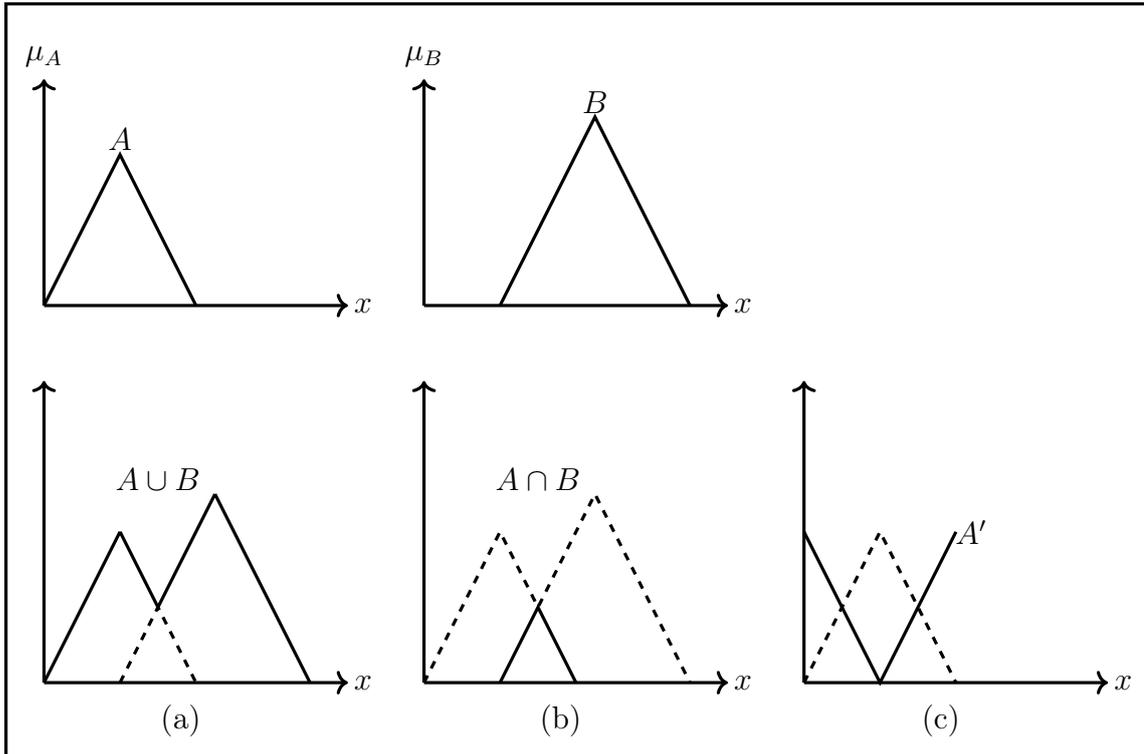


Figura 3.33: Representação gráfica das operações com subconjuntos fuzzy: a) união; b) intersecção e c) complemento.

Como na teoria de conjuntos clássica, também se define propriedades para conjuntos fuzzy. Assim, para conjuntos fuzzy A , B e C no conjunto universo \mathcal{E} , as operações que envolvem união e intersecção e complemento continuam valendo e dadas com as suas funções de pertinência como:

Definição 3.26. (Propriedade Comutativa): Expressa pela Eq. 3.61

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & \mu_{A \cup B}(x) &= \mu_{B \cup A}(x) \\ A \cap B &= B \cap A, & \mu_{A \cap B}(x) &= \mu_{B \cap A}(x) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Definição 3.27. (Propriedade Associativa): Expressa pela Eq. 3.62

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C, & \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \mu_{(A \cup B) \cap C}(x) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup C, & \mu_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \mu_{(A \cap B) \cup C}(x) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Definição 3.28. (Propriedade Distributiva): Expressa pela Eq. 3.63

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), & \mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), & \mu_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Definição 3.29. (Propriedade Idempotência): Expressa pela Eq. 3.64

$$\begin{aligned}
A \cup A &= A, & \mu_{A \cup A}(x) &= \mu_A(x) \\
A \cap A &= A, & \mu_{A \cap A}(x) &= \mu_A(x)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Definição 3.30. (Propriedade Identidade): Expressa pela Eq. 3.65

$$\begin{aligned}
A \cup \Phi &= A, & \mu_{A \cup \Phi}(x) &= \mu_A(x) \\
A \cap \mathcal{E} &= A, & \mu_{A \cap \mathcal{E}}(x) &= \mu_A(x)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Definição 3.31. (Propriedade Absorção): Expressa pela Eq. 3.66

$$\begin{aligned}
A \cap \Phi &= \Phi, & \mu_{A \cap \Phi}(x) &= \mu_\Phi(x) \\
A \cup \mathcal{E} &= \mathcal{E}, & \mu_{A \cup \mathcal{E}}(x) &= \mu_\mathcal{E}(x)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Além das operações mostradas, outras podem ser usadas para definir operações para união e intersecção de conjuntos fuzzy. Para estas classes de operações foram criadas duas famílias de operadores denominadas normas triangulares ou T-normas e Co-normas triangulares ou T-conormas ou S-normas, formalmente, definidas a seguir (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.32. (Norma Triangular): Um operador $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é denotado de operador Norma Triangular (T-norma) se, e somente se, T é um operador comutativo, associativo, não decrescente em cada um de seus pontos $T(x, 1) = x$, para todo $x \in [0, 1]$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Em outras palavras, da Definição 3.32, que qualquer T-norma deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $T(x, y) = T(y, x)$ (comutatividade);
- $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (associatividade);

- $T(x, y) \leq T(z, w)$ se $x \leq z$ e $y \leq w$ (monotonicidade);
- $T(x, 1) = x$, para todo $x \in [0, 1]$ (identidade).

De maneira análoga, um operador Co-norma triangular é definido como segue:

Definição 3.33. (Co-norma Triangular): Um operador $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é denotado de operador Co-norma Triangular (T-conorma) se S é comutativo, associativo, não decrescente ponto a ponto (em cada argumento) $S(x, 0) = x$, para todo $x \in [0, 1]$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Em outras palavras, da Definição 3.33, que qualquer T-conorma deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $S(x, y) = S(y, x)$ (comutatividade);
- $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (associatividade);
- $S(x, y) \leq S(z, w)$ se $x \leq z$ e $y \leq w$ (monotonicidade);
- $S(x, 0) = x$, para todo $x \in [0, 1]$ (identidade).

A operação de intersecção e união pode ser definida por meio dos operadores T-norma triangular e T-conorma triangular.

Definição 3.34. (T-Norma baseada na intersecção): Seja T uma T-norma. A T-intersecção de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como na Eq. 3.67, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min_{x \in \mathcal{E}} (\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (3.67)$$

Definição 3.35. (T-conorma baseada na união): Seja S uma T-conorma. A S-união de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como na Eq. 3.68, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max_{x \in \mathcal{E}} (\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (3.68)$$

O emprego do operador mínimo denotado pelo operador T-norma e do operador máximo denotado pelo operador S-norma foram propostos por Zadeh (1965), desta maneira, existem outras T-normas (tais como: mínimo, produto algébrico, produto limitado, produto drástico) e S-conormas (tais como: máximo, soma algébrica, soma limitada, soma drástica) que podem ser empregadas na definição dos sistemas fuzzy (Nachtegael e Kerre, 2001).

3.7.2.1 Tipos de T-norma

Conforme citado anteriormente as T-normas se dividem da seguinte maneira:

Definição 3.36. (Intersecção Padrão ou Inteseccção de Zadeh ou Mínimo): Seja T uma T-norma. A T-intersecção de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como na Eq. 3.67, para todo $x \in \mathcal{E}$, ou seja, $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.37. (Produto Algébrico): Seja T uma T-norma. O produto algébrico T de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.38. (Produto Limitado ou Diferença Limitada ou Intersecção de Lukaziewicz): Seja T uma T-norma. A diferença limitada T de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{max}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.39. (Produto Drástico): Seja T uma T-norma. O produto drástico T de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, quando $\mathbf{max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$ e zero quando $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ são menores que 1, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

3.7.2.2 Tipos de T-conorma

Conforme citado anteriormente as T-conormas se dividem da seguinte maneira:

Definição 3.40. (União Padrão ou União de Zadeh ou Máximo): Seja S uma T-conorma ou S-norma. A S-união de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como na Eq. 3.68, para todo $x \in \mathcal{E}$, ou seja, $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{max}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.41. (Soma Algébrica): Seja S uma T-conorma ou S-norma. A soma algébrica S de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.42. (Soma Limitada ou União de Lukaziewicz): Seja S uma T-conorma ou S-norma. A soma limitada S de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{min}(1 + \mu_A(x) - \mu_B(x), 1)$, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

Definição 3.43. (Soma Drástica): Seja S uma T-conorma ou S-norma. A soma drástica S de dois conjuntos fuzzy A e B em \mathcal{E} é definida como $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mathbf{max}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, quando $\mathbf{min}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$ e 1 quando $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ são maiores que zero, para todo $x \in \mathcal{E}$ (Nachtegael e Kerre, 2001).

3.7.3 Relações Fuzzy

As relações fuzzy são generalizações das relações usuais utilizadas na teoria clássica dos conjuntos, e por serem mais gerais do que funções, estas permitem que as dependências entre as variáveis envolvidas sejam capturadas sem que nenhuma caracterização direcional particular seja fixada, ou seja, não há domínio e contradomínio. Relações fuzzy entre conjuntos fuzzy podem ser construídas a partir do produto cartesiano dos mesmos, sendo o produto cartesiano fuzzy a intersecção entre conjuntos fuzzy de universos de discurso diferentes (Nachtegaele e Kerre, 2001).

Definição 3.44. (Produto cartesiano de conjuntos fuzzy): Sejam \mathcal{E} e \mathcal{P} dois universos de discurso. O produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ e $B \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ é $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$ com $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}$ (Fuller, 1995).

Pela Definição 3.44, observa-se que o produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ e $B \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ é uma relação fuzzy binária em $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$, ou seja, $A \times B \in \mathfrak{F}(\mathcal{E} \times \mathcal{P})$. Sejam \mathcal{E} e \mathcal{P} dois universos de discursos quaisquer. Uma relação fuzzy, definida em um espaço bidimensional, é qualquer conjunto fuzzy do universo de discurso, definido no produto cartesiano $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$, que associa cada elemento (x, y) em $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$ um grau de pertinência, denotado por $\mu_R(x, y)$, definido no intervalo unitário, ou seja, $R : \mathcal{E} \times \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$. Neste caso, a função característica é definida como:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}, \quad (3.69)$$

e a relação fuzzy é vista como uma generalização do produto cartesiano clássico $\mathcal{E} \times \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$ e é dada por:

$$R = \left\{ ((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P} \right\}. \quad (3.70)$$

Generalizando, as relações bidimensionais fuzzy podem ser obtidas das relações multidimensionais fuzzy e dadas por:

$$R = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_n \rightarrow [0, 1], \quad (3.71)$$

sendo $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_n$ conjuntos universos de discurso e uma relação pode ser escrita como um conjunto fuzzy:

$$R = \left\{ ((x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_n \right\}, \quad (3.72)$$

sendo (x_1, x_2, \dots, x_n) elementos dos conjuntos nos universos de discurso. Se os valores

x_1, x_2, \dots, x_n são discretos, a relação fuzzy R , pode ser expressa em forma matricial, relacionando os elementos pertencentes aos diferentes conjuntos fuzzy. Como no caso de conjuntos fuzzy, as relações fuzzy podem ser combinadas e definidas as operações de união, intersecção e complemento, como dadas nas definições a seguir. Estas operações são importantes porque elas podem descrever interações existentes entre as variáveis. Sejam R e S duas relações fuzzy binárias em $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$, dadas por (Nachtegaele e Kerre, 2001):

$$\begin{aligned} R &= ((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P} \\ S &= ((x, y), \mu_S(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Definição 3.45. (Intersecção de relações fuzzy): Sejam R e S duas relações fuzzy binárias $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$. A intersecção das relações fuzzy R e S é definida por $\mu_{R \cap S}(x, y) = \min \{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$, $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}$.

Definição 3.46. (União de relações fuzzy): Sejam R e S duas relações fuzzy binárias $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$. A união das relações fuzzy R e S é definida por $\mu_{R \cup S}(x, y) = \max \{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$, $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}$.

Definição 3.47. (Complemento de relações fuzzy): Sejam R e S duas relações fuzzy binárias $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$. O complemento de uma relação fuzzy R é definido por $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}$.

3.7.4 Composição de Relações Fuzzy

As relações fuzzy definidas em diferentes conjuntos de discurso podem ser combinadas utilizando-se de diferentes operadores de composição, sendo a composição mais conhecida dada como na definição a seguir (Nachtegaele e Kerre, 2001):

Definição 3.48. (Composição de Relações Fuzzy): Sejam \mathcal{E} , \mathcal{P} e \mathcal{V} três universos de discurso. Seja R uma relação fuzzy em $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$ e S uma relação fuzzy em $\mathcal{P} \times \mathcal{V}$. A composição das relações R e S é uma relação fuzzy **sup-T**, definida por:

$$R \circ S = \int_{\mathcal{E} \times \mathcal{V}} \sup_{y \in \mathcal{P}} \{T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\} \mid (x, z). \quad (3.74)$$

As composições mais usadas, definidas sobre as relações fuzzy, são aquelas que utilizam o operador mínimo e máximo sendo, respectivamente, denominadas composição **sup-min** e **sup-max**, que combinam relações fuzzy de produtos de espaços diferentes. Fazendo a notação:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in \mathcal{P}} \{T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}, \quad (3.75)$$

a função de pertinência da composição de relações fuzzy, no caso discreto, a composição **sup-min** é denominada **max-min**, podendo esta ser representada em forma matricial, sendo cada um dos termos da matriz, $\mu_{R \circ S}(x, z)$, dado por:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \mathbf{max}_{y \in \mathcal{Y}} \{ \mathbf{min}(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \}, \quad (3.76)$$

e, portanto, a composição **max** – **min** entre R e S é o seguinte conjunto fuzzy:

$$R \circ S = \left\{ ((x, y), \mathbf{max}_{y \in \mathcal{Y}} \{ \mathbf{min}(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \}) \mid x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{V} \right\} \quad (3.77)$$

Note que se R e S são duas relações fuzzy em $\mathcal{E} \times \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$, com $\mathcal{E} = x_1, x_2, \dots, x_n$, $\mathcal{Y} = y_1, y_2, \dots, y_m$ e $\mathcal{V} = z_1, z_2, \dots, z_l$, respectivamente, conjuntos fuzzy finitos, a forma matricial da relação, considerando a composição **max** – **min**, é obtida como na multiplicação de matrizes usual, substituindo a operação produto pelo mínimo e a soma pelo máximo. Deste modo, se R é uma relação fuzzy em $\mathcal{E} \times \mathcal{Y}$ e S é uma relação fuzzy em $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$, então, R e S podem ser representadas, respectivamente, por:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nm} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

e, portanto, usando a Definição 3.48, a relação fuzzy $Q = R \circ S$ dada pela composição **max** – **min**, tem a forma matricial:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1l} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nl} \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

com,

$$\begin{aligned} q_{ij} = \mu_{R \circ S}(x, z) &= \mathbf{max}_{y_k} \{ \mathbf{min}(\mu_R(x_i, y_k), \mu_S(y_k, z_j)) \} \\ &= \mathbf{max}_k \{ \mathbf{min}(r_{ik}, s_{kj}) \} \end{aligned} \quad (3.80)$$

De modo análogo, pode ser definida uma composição **inf-S** de relações fuzzy R e S , com os elementos da composição definida como:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \mathbf{inf}_{y \in \mathcal{Y}} \{ S(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \}, \quad (3.81)$$

que para o caso discreto, com a utilização do operador máximo, tem-se a composição **min** – **max**, expressa como:

$$R \circ S = \left\{ ((x, y), \mathbf{min}_{y \in \mathcal{Y}} \{ \mathbf{max}(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \}) \mid x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{V} \right\} \quad (3.82)$$

Destacam-se duas composições em particular que serão utilizadas neste trabalho. Na literatura são encontradas várias definições para esses conceitos, baseadas nas t-normas e nas t-conormas (ou s-normas).

3.7.4.1 Erosão Fuzzy

Estendendo a definição de erosão no caso da morfologia binária para a morfologia em níveis de cinza considerando os subconjuntos fuzzy A e B do universo \mathcal{E} , tem-se (Kerre e Nachtgael, 2000):

$$(A \ominus B)(x, y) = \mathbf{min} \left\{ \mathbf{max}_{(i,j) \in B} \{A(x + i, y + j), 1 - B(i, j)\} \right\}. \quad (3.83)$$

A Equação 3.83, é uma generalização da Definição 3.36. O resultado é uma abordagem que se baseia na definição da equação generalizada de Zadeh. Uma outra abordagem é desenvolvida por Lukaziewicz, baseada na Definição 3.38, generalizando a composição, considerando que o intervalo é limitado superiormente em 1, obtém-se a equação generalizada, que tem a seguinte forma (Kerre e Nachtgael, 2000):

$$(A \ominus B)(x, y) = \mathbf{min} \left\{ \mathbf{min}_{(i,j) \in B} \{1, 1 + [A(x + i, y + j) - B(i, j)]\} \right\}. \quad (3.84)$$

3.7.4.2 Dilatação Fuzzy

Estendendo a definição de dilatação no caso da morfologia binária para a morfologia em níveis de cinza considerando os subconjuntos fuzzy A e B do universo \mathcal{E} , tem-se (Kerre e Nachtgael, 2000):

$$(A \oplus B)(x, y) = \mathbf{max} \left\{ \mathbf{min}_{(i,j) \in B} \{A(x + i, y + j), B(i, j)\} \right\}. \quad (3.85)$$

A Equação 3.85, é uma generalização da Definição 3.40. O resultado é uma abordagem que se baseia na definição da equação generalizada de Zadeh. Uma outra abordagem é desenvolvida por Lukaziewicz, baseada na Definição 3.42, generalizando a composição, considerando que o intervalo é limitado inferiormente em 0, obtém-se a equação generali-

zada, que tem a seguinte forma (Kerre e Nachtegae, 2000):

$$(A \oplus B)(x, y) = \mathbf{max} \left\{ \mathbf{max}_{(i,j) \in B} \{0, [A(x+i, y+j) + B(i, j)] - 1\} \right\}. \quad (3.86)$$

No próximo capítulo será mostrado uma aplicação da morfologia matemática em dados sintéticos com modelos geológicos elaborados com diversos tipos de geometrias.

4 APLICAÇÃO DA MORFOLOGIA PARA ATENUAÇÃO DE MÚLTIPLAS DE SUPERFÍCIE

A morfologia matemática aqui foi aplicada em testes sintéticos, onde são modeladas as múltiplas de superfície livre considerando refletores com vários tipos de geometria. Os dados sísmicos utilizados nos testes foram gerados no pacote sísmico Seismic Unix (Stockwell, 2012) usando um modelador de diferenças finitas (sufdmod2_pml) para camadas plano horizontais e assim como outras geometrias. Os modelos utilizados estão descritos na Tabela 4.1. Para todos os modelos a geometria de aquisição é mostrada na Tabela 4.2.

Modelo	1	2	3	4	5	6
Descrição refletor	plano c/1 refletor	plano c/2 refletores	plano c/4 refletores	inclinado c/1 refletor	curvo c/1 refletor	em sinclinal c/1 refletor
velocidades	1500m/s 2150m/s	1500m/s 2300m/s 2500m/s	1500m/s 2300m/s 2500m/s 2700m/s 3000m/s	1500m/s 2300m/s	1500m/s 2300m/s	1500m/s 2300m/s

Tabela 4.1: Informações das camadas dos modelos sintéticos.

Descrição	Parâmetros
número de tiros	120
número de receptores	300
profundidade dos receptores	5m
profundidade dos tiros	30m
intervalo entre os tiros	25m
intervalo entre os receptores	10m
Tempo de amostragem	3s - 6s

Tabela 4.2: Informações dos parâmetros de aquisição sísmica.

Aos dados sísmicos sintéticos foi aplicado o fluxo de processamento convencional que consistiu das etapas de pré-processamento e processamento. Na etapa de pré-processamento foram realizados: carregamento da geometria e a edição (Fig.4.1). A etapa de processamento são realizados: organização em famílias CMP, análise de velocidade, correção NMO, empilhamento, migração (Fig. 4.1). Na próxima seção as etapas serão descritas brevemente. Para maiores detalhes o livro de Yilmaz (2001) pode ser consultado.

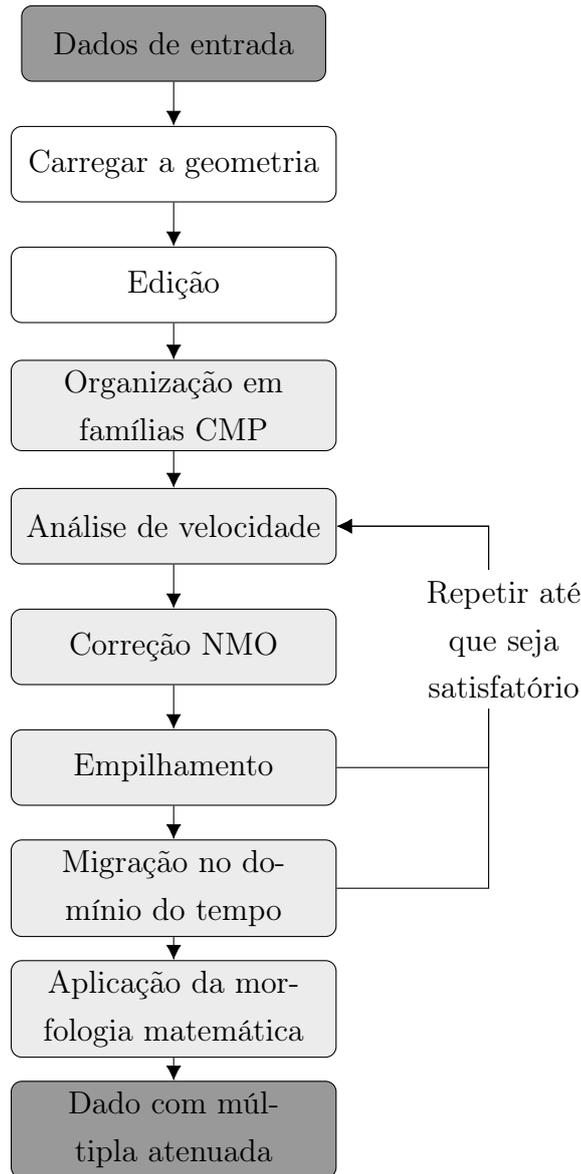


Figura 4.1: Estrutura geral do sistema de processamento sísmico: dado de entrada; pré-processamento (carregar geometria, edição de traços); processamento (organização em famílias CMP, análise de velocidade, correção NMO, empilhamento, migração no domínio do tempo); filtragem e resultado.

4.1 PROCESSAMENTO

No método sísmico, um sinal acústico ou elástico é emitido por uma fonte (exemplo: airgun, vibroseis, dinamite, etc) que então se propaga através das camadas geológicas. Este sinal, propagando-se em subsuperfície depara-se com camadas de diferentes impedâncias acústicas (produto da velocidade de propagação pela densidade da camada). Parte de sua energia é refletida, sendo esta registrada por receptores mecânicos/elétricos (geofones ou hidrofones). Por outro lado, parte da energia deste sinal é transmitida para camadas subjacentes.

Os dados coletados, por sua vez, não estão prontos para a interpretação sísmica,

fazendo-se necessário processar estes dados. Para isso utilizam-se técnicas matemáticas e computacionais a fim de melhorar a qualidade destes e reposicionar os refletores de maneira correspondente com a sua posição real (Fig. 4.1).

4.1.1 Geometria

Esta etapa, ainda que inicial, é muito importante no processamento sísmico, dado que um simples erro pode comprometer todo o trabalho, de maneira determinante, a posição do tiro e dos receptores. Portanto, um erro de geometria pode afetar sistematicamente a ordenação dos domínios do tiro, do CMP, da distância fonte-receptor, estações receptoras, afetando todo o trabalho subsequente. Na montagem da geometria é muito importante o relatório de campo, que possui informações relevantes como: as coordenadas do tiro, distância entre fonte-receptor, direção do levantamento, afastamento entre os receptores, afastamento entre as fontes, receptores com problemas, tiros com problemas, etc.

4.1.2 Edição

Durante a aquisição dos dados, diversas fontes externas assim como problemas instrumentais podem distorcer os traços. Os exemplos mais comuns destas fontes são: tratores, automóveis, britadeiras, cabos de alta tensão, animais, embarcações, dentre outros. O resultado destas interferências indesejáveis são traços ruidosos de frequências variadas, assim como traços sem informações quaisquer (traços com amplitude zero). Estes traços prejudicam outras etapas (exemplo: filtragem do dado sísmico), uma vez que podem superestimar ou subestimar o cálculo do traço. Além disso, ruídos em larga escala marcam a seção sísmica e afetam etapas, como a deconvolução, supressão de múltiplas e a migração, ponto importantíssimo deste trabalho.

4.1.3 Organização em Famílias CMP

Ordenação em famílias CDP (Common Depth Point), ou ponto comum em profundidade, refere-se ao agrupamento dos traços que tem em comum o mesmo ponto de reflexão. Esses traços são agrupados por ordem de distâncias fonte-receptor (offsets) mediante ao uso das informações do banco de dados da geometria. Cada traço do CDP terá em seu cabeçalho (header) informações de elevação, coordenadas, cobertura, número do traço, etc.

4.1.4 Análise de Velocidade

A análise de velocidade é um dos processos mais importantes no processamento sísmico uma vez que consome muito tempo de trabalho e é um momento de extrema importância por representar a etapa inicial de interpretação de dados. Os traços de um sismograma no

domínio CDP, representam as reflexões referentes a um mesmo ponto em profundidade, se distinguindo entre si apenas por deslocamentos no tempo devido aos diferentes afastamentos entre fonte-receptor. Logo, esta etapa consiste em encontrar velocidades que corrijam os deslocamentos causados pelos diferentes afastamentos fonte-receptor, obtendo como resultado uma primeira aproximação para as velocidades reais em subsuperfície.

Na prática, as análises de velocidades são selecionadas em intervalos espaciais constantes ao longo da linha sísmica e o campo de velocidade é linearmente interpolado entre os pontos em análise. O espaçamento no tempo-espaço, de cada análise, depende do grau de variação lateral das velocidades e a necessidade de definir a geometria das estruturas. Cada análise é feita interativamente usando uma combinação de: cálculo de coerência de acordo com o melhor ajuste de uma função hiperbólica de velocidade correspondente a um evento real de um CDP (funções semblance ou mapa semblance de coerência), painel CVS (Common Velocity Stack: vários CDP's são corrigidos por NMO e empilhados a uma velocidade constante. Os painéis empilhados são colocados lado à lado e as velocidades podem ser selecionadas onde os eventos mostram maior amplitude ou continuidade) e famílias (gathers) corrigidas pelo NMO.

4.1.5 Correção NMO

O NMO é o processo responsável pela compensação do atraso nos tempos de chegada dos traços (para um mesmo evento sísmico) que é causado pela diferença de distância entre pares de fonte-receptor. A correção é feita no domínio dos CDP's através da aplicação das velocidades obtidas nas análises de velocidades usando a expressão de tempo de trânsito hiperbólico da reflexão (Eq. 4.1). Uma vez que o tempo de um evento (t) é obtido, faz-se a correção para levar ao tempo da incidência normal mediante aplicação da Equação 4.2, descrita como:

$$t = t_0^2 + \frac{X^2}{V_{NMO}^2} \quad (4.1)$$

$$\Delta t_{NMO} = t_0 * \left(\sqrt{1 + \left(\frac{X}{V_{NMO} * t_0} \right)^2} - 1 \right). \quad (4.2)$$

4.1.6 Empilhamento

Depois de corrigidos, os traços no domínio CMP são empilhados. Se a correção NMO foi realizada eficientemente, a quantidade de eventos sísmicos dentro de um mesmo tempo de trânsito resultará em uma interferência construtiva obtendo reflexões mais coerentes e contínuas. O empilhamento também é um filtro de ruído aleatório uma vez que ocorrem interferências destrutivas quando as amostras são adicionadas.

4.1.7 Migração

A migração dos dados sísmicos, etapa de extrema importância para do trabalho, é geralmente a última, mas não menos importante etapa do processamento de dados sísmicos, visto que, após sua aplicação, obtém-se a imagem final do dado sísmico. Para isso, é importantíssimo que o resultado final deva representar os eventos de reflexão fielmente posicionados em subsuperfície. Devido ao fato que a geologia real se apresenta de forma extremamente complexa, contendo estruturas com diversas geometrias (exemplo: falhamentos, dobras, fraturas, acunhamentos), é de conhecimento que os sinais sísmicos que são recebidos pelos geofones/hidrofones nem sempre revelam as reais localizações dos alvos. Por isso, a migração, segundo Yilmaz (2001), é um conjunto de procedimentos que visam reconstruir uma seção sísmica, de modo que os eventos de reflexão sejam reposicionados em suas corretas localizações e nos tempos de reflexão corretos, eliminando assim as hipérbolas geradas a partir de estruturas difratoras.

Atualmente, as técnicas de migração sísmica se baseiam em desfazer os efeitos da propagação de ondas resolvendo a equação da onda elástica ou acústica. Vale ressaltar que para este trabalho foi apenas utilizado para o caso acústico. Estas técnicas baseadas na equação da onda sugerem que, a partir do campo de ondas registrado na superfície (sismograma), é possível o cálculo dos campos de ondas anteriores, realizando-se uma continuação descendente da frente de onda (continuação para baixo), gerando assim, um cubo e informações. Então, corrigindo-se gradativamente os efeitos da propagação tem-se a correta localização do refletor exatamente quando o campo já foi reconstruído até o momento exato em que ocorre a reflexão. O fator mais importante para que a migração seja executada com sucesso é a construção de um modelo de velocidades mais próximo do real, que represente as velocidades reais em subsuperfície. Erros na determinação destas velocidades impossibilitam o colapso total das hipérbolas de difração, mantendo-as devido à difração das ondas refletidas. Estes dados então são considerados sub ou supermigrados se as velocidades do modelo forem, respectivamente, menores ou maiores que as velocidades das camadas geológicas reais.

A migração dos dados sísmicos pode ser feita antes ou depois do empilhamento (pré-stack ou pós-stack), podendo ser em tempo ou em profundidade. A escolha destes caminhos depende do tipo de resultado que se objetiva e, não menos importante, do tempo hábil para se ter um resultado. Para este trabalho a migração pós-empilhamento, usando o método de Kirchhoff foi suficiente.

Na Figura 4.1 a etapa de aplicação da morfologia matemática como filtro de atenuação de múltipla é descrita no fluxo da Figura 4.2 e na seção de Metodologia deste capítulo.

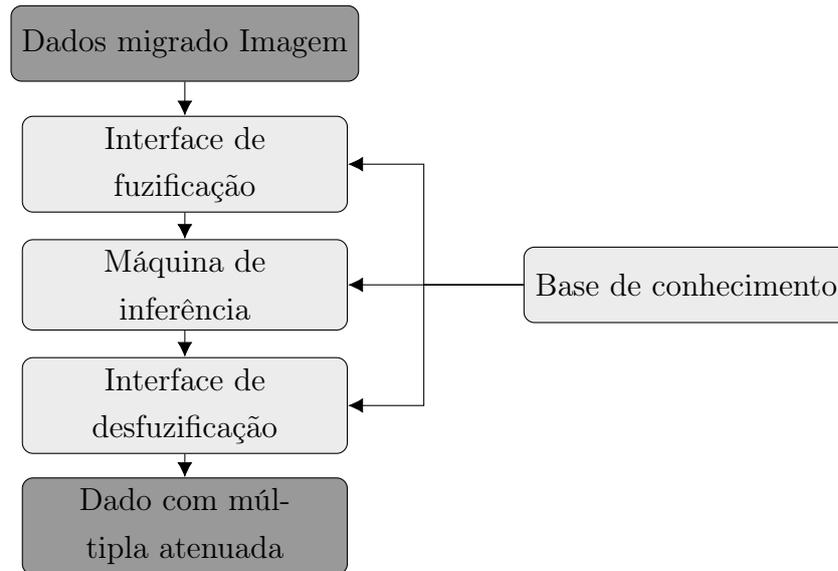


Figura 4.2: Fluxo de modelo de aplicação da morfologia matemática.

4.2 APLICAÇÃO DA MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Os sistemas baseados em regras estão entre as aplicações mais utilizadas da teoria dos conjuntos fuzzy, e têm sido muito importantes no desenvolvimento dos controladores fuzzy modernos. Se existe a necessidade de lidar com a combinação de conhecimento incerto sem ter um modelo analítico, é necessário usar sistemas de inferência baseados em regras. Os sistemas fuzzy para processamento de imagem são sistemas baseados em regras que usam a lógica fuzzy para tomar decisões sobre dados das imagens. A estrutura básica de um sistema fuzzy para processamento de imagem, assim como para qualquer outro tipo de aplicação, consiste de quatro componentes principais: interface de fuzificação, máquina de inferência, interface de desfuzificação e a base de conhecimento, conforme ilustra a Figura 4.2.

A interface de fuzificação associa uma imagem (níveis de cinza, características, segmentos, etc) com um ou mais valores de pertinência em relação às propriedades de interesse, tais como brilho, borda, homogeneidade, etc. Dependendo do tipo de problema um método de fuzificação apropriado é selecionado. A base de conhecimento consiste de uma base de regras, que caracteriza a estratégia de estimativa e, também de uma base dados, que armazena as definições necessárias sobre discretização dos universos de discursos, definições de funções de pertinência, α -nível, etc. A máquina de inferência processa os dados de entrada fuzzy, junto com as regras, de modo a inferir as ações de saída fuzzy, aplicando o operador de implicação fuzzy (Composições de Relações Fuzzy) e as respectivas regras (Nachtgeael e Kerre, 2001).

O processo de tomada de decisão é realizado pela máquina de inferência, que usa as regras contidas na base de conhecimento. As regras fuzzy definem as implicações entre as variáveis de entrada e as saídas, fornecendo como resultado final uma região fuzzy de saída.

A máquina de inferência avalia todas as regras existentes na base de regras e combina os pesos consequentes de todas as regras relevantes a um único conjunto fuzzy de saída. Além das regras de inferência, os valores de pertinência gerados podem ser modificados por operadores fuzzy, que operam no plano da pertinência. Os operadores normalmente utilizados são os operadores básicos de união, intersecção, complemento, os operadores de transformação de escala (contração, dilatação, etc) e operadores de agregação, modificação e classificação (Nachtegael e Kerre, 2001).

A interface de desfuzificação decodifica os resultados, uma vez que muitas aplicações precisam de um valor crisp como saída. Os algoritmos fuzzy sempre fornecem respostas fuzzy (uma função de pertinência ou um valor de pertinência). Para que o processo de fuzificação seja revertido, utiliza-se a desfuzificação para produzir uma resposta crisp para uma característica de saída fuzzy. Existem diferentes maneiras de desfuzificar os resultados. Os métodos de desfuzificação mais comuns são centro de área e média dos máximos (Ruspini et al., 1998).

4.3 TESTES SINTÉTICOS

Para o desenvolvimento deste trabalho foram essenciais os seguintes elementos metodológicos:

- Interface de fuzificação - a figura onde quer-se aplicar a morfologia matemática, neste trabalho a seção migrada em escala de cinza (Fig. 4.3a);
- Base de conhecimento - Tipo de função de pertinência (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32), Tamanho do elemento estruturante (exemplo: 3x3), α -nível (Def. 3.9) (Fig. 4.3b);
- Máquina de inferência - processa a figura da entrada fuzzy, junto com as regras (tipo de função de pertinência, tamanho do elemento estruturante e α -nível), aplicando o operador de implicações (Composições de Relações Fuzzy - Eqs. 3.83, 3.84, 3.85 e 3.86);
- Interface de Desfuzificação - decodificar os resultados para escala de cinza (Fig. 4.3c).

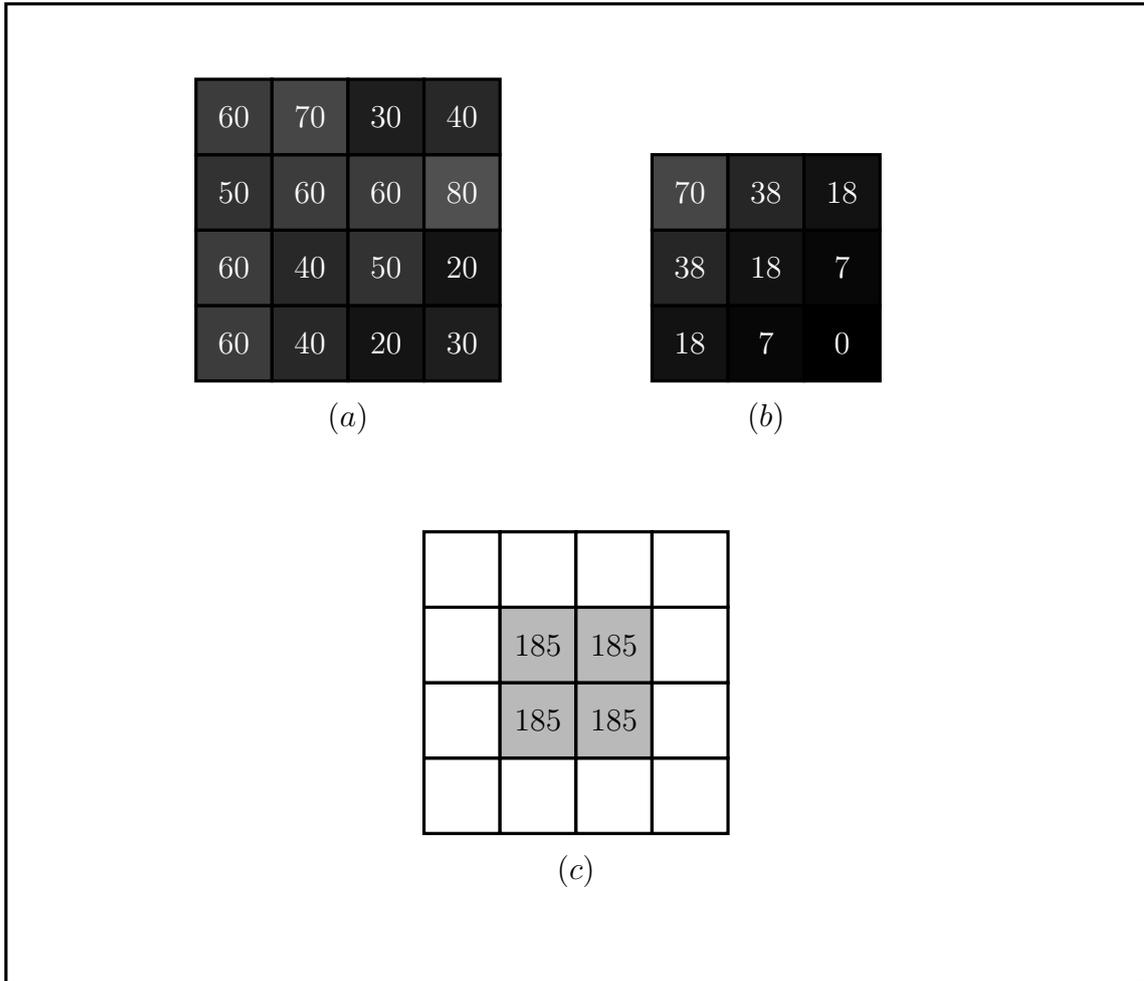


Figura 4.3: Exemplo de como a morfologia matemática pode ser utilizada como filtro em uma figura em escala de cinza. a) é a imagem original em escala de cinza. b) é o elemento estruturante que é representado pela função de pertinência do tipo gaussiana, com tamanho 3x3 e α -nível igual a 70. c) é a imagem resultante da composição da relação de Zadeh (Eq. 3.83). Neste exemplo foi aplicado o método de Zadeh para a erosão fuzzy.

Nas próximas seções deste capítulo foram analisadas as aplicações dos filtros de morfologia matemática baseados nas composições das relações fuzzy de Zadeh (Eqs. 3.83 e 3.84) e Lukaziewicz (Eqs. 3.85 e 3.86) tanto para a operação de erosão quanto de dilatação.

4.3.1 Modelo 1 - Formado por um Refletor Plano e Horizontal

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.4a e 4.4b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.5) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.6). Na Figura 4.7a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1^o e 2^o

ordem nos tempos de 1.4s e 2s, respectivamente.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa (α -nível) os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3x3 e tipo gaussiano.

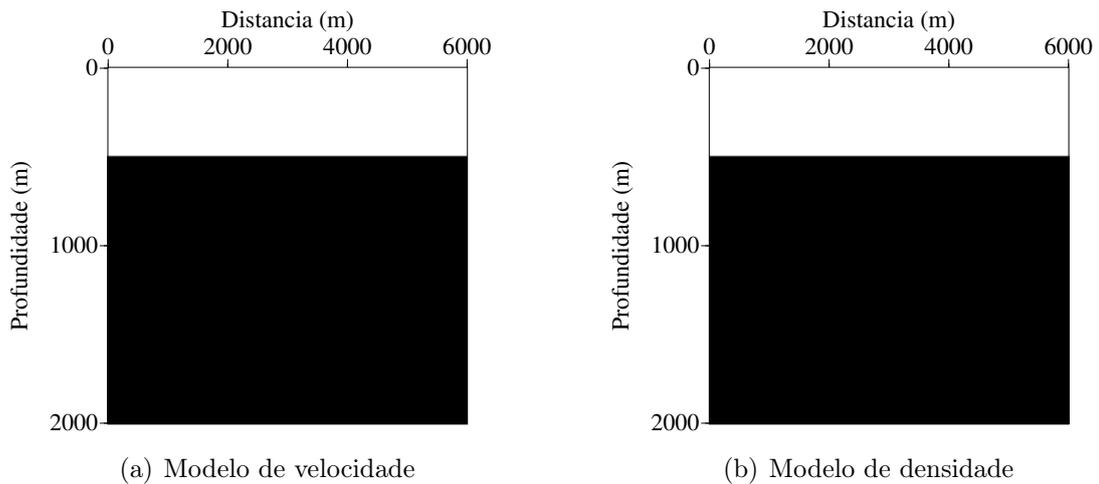


Figura 4.4: Modelo 1: onde a) representa o modelo de velocidade onde a primeira camada tem velocidade de 1500 m/s e a segunda camada de 2150 m/s ; b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 e 1.2 g/cm^3 , para cada camada.

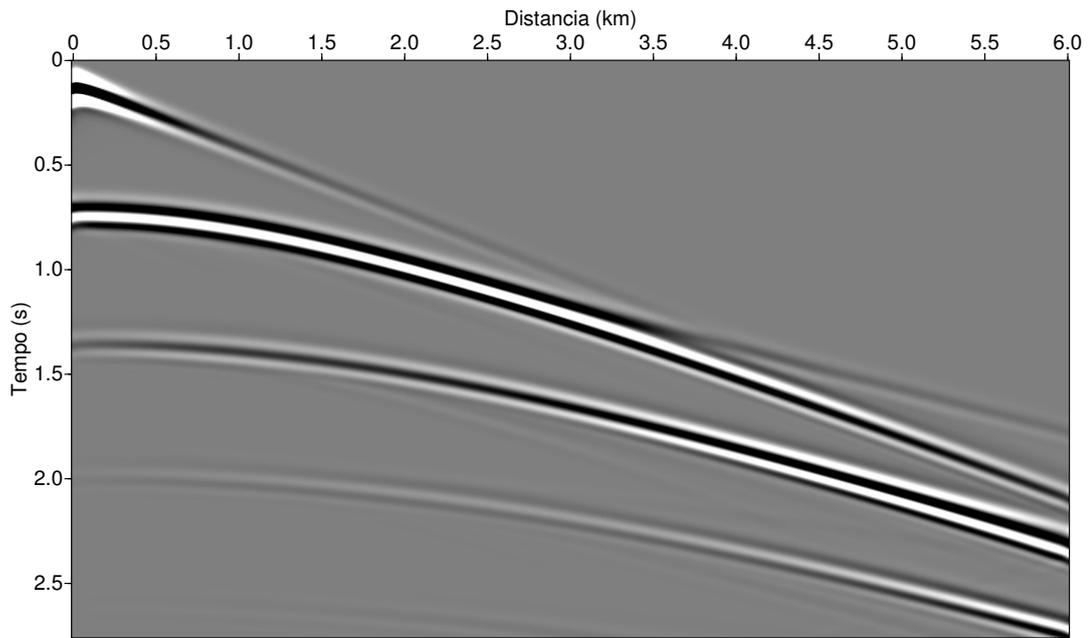


Figura 4.5: Modelo 1. Família de um tiro comum onde o refletor está no tempo de 0.7s, as múltiplas de 1^o e 2^o ordem nos tempos de 1.4s e 2s, respectivamente.

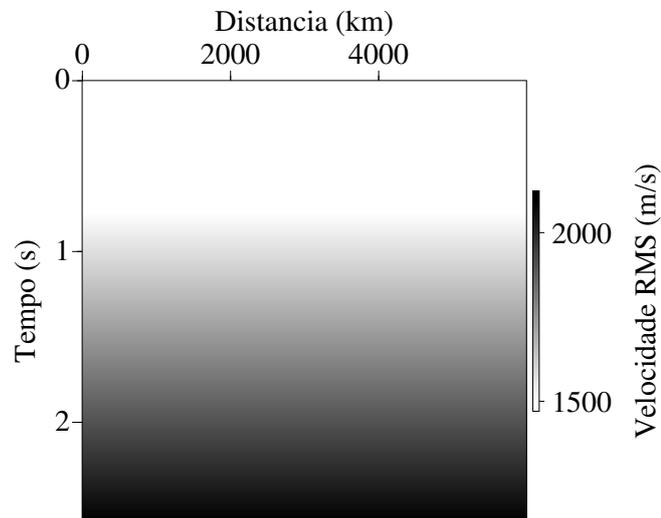


Figura 4.6: Modelo 1. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde as velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 2200 m/s .

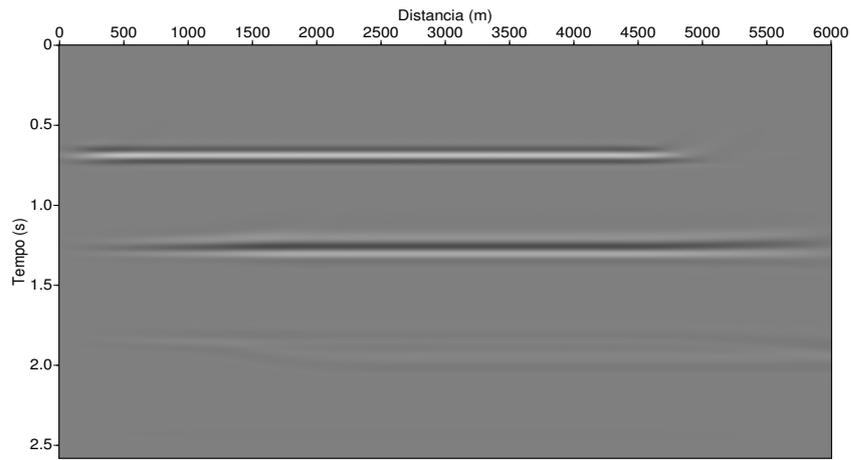
Nas Figuras 4.7a 4.8a, tem-se a seção sísmica migrada pós-empilhamento. A múltipla de 1^o ordem é vista no tempo de aproximadamente 1.4s. A múltipla de 2^o ordem visualizada na Figura 4.5, está mais atenuada. Isto se deve ao fato de que essa múltipla tem menos energia e de ser atenuada com a aplicação da técnica do CMP.

Na Figura 4.7b e 4.7c mostram o resultado da aplicação do filtro da morfologia matemática, considerando dois valores diferentes (70 e 100) para o corte alfa (ver Figuras do elemento estruturante). Na Figura 4.7b com o corte alfa igual a 70 se mostrou mais eficiente pois removeu a múltipla completamente quando comparada com a Figura 4.7c com o corte alfa igual a 100 e o método de suavização de Zadeh, porém, apresenta suavização das amplitudes do dado.

As Figuras 4.8b e 4.8c mostram o resultado da aplicação do filtro da morfologia matemática, considerando dois valores diferentes (75 e 100) para o corte alfa e o método de suavização de Lukaziewicz.

Na Figura 4.8b com o corte alfa igual a 75 se mostrou mais eficiente pois removeu a múltipla completamente quando comparada com a Figura 4.8c com corte alfa igual a 100, porém, apresenta suavização das amplitudes do dado.

É importante ressaltar que vários valores do corte alfa, tipos de elementos estruturantes e métodos de suavização foram testados, mas, são mostrados apenas os resultados mais promissores. E ainda que de acordo com o método de suavização os valores do corte alfa variam, isso porque, no método de Zadeh é considerado o menor valor entre os máximos, por outro lado, no método de Lukaziewicz é considerado o maior valor entre os máximos. Comparando os melhores resultados das Figuras 4.7b e 4.8b, a Figura 4.8b apresenta melhor resultado pois o refletor esta mais focalizado.



(a) Imagem migrada

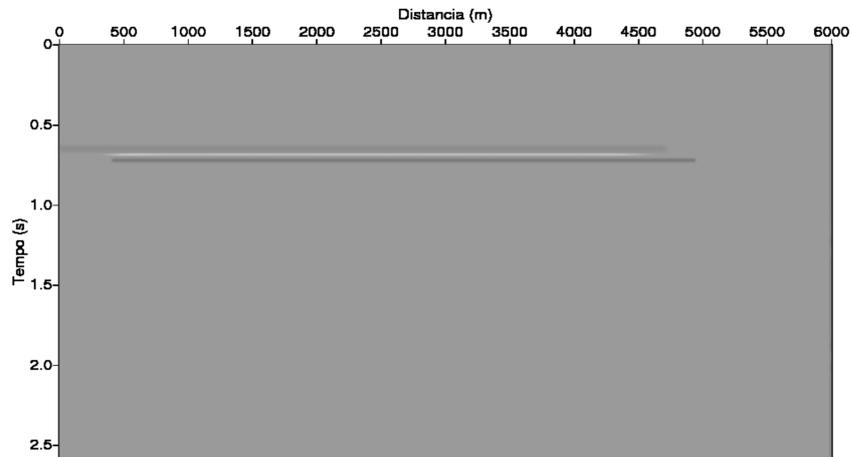
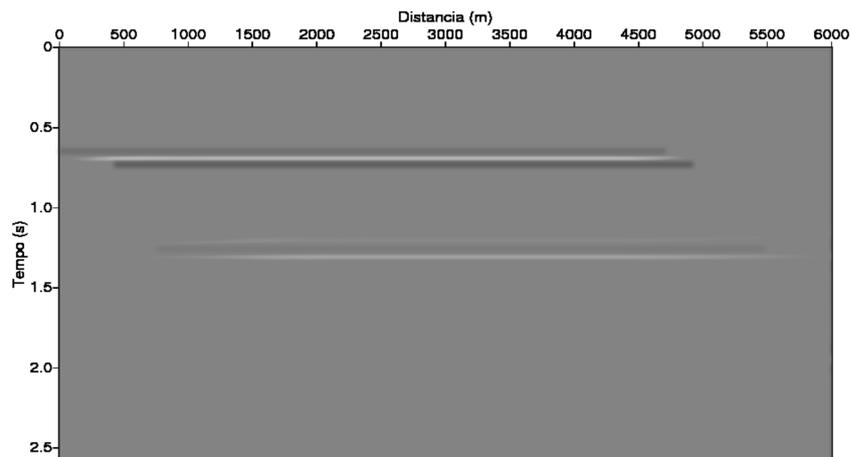
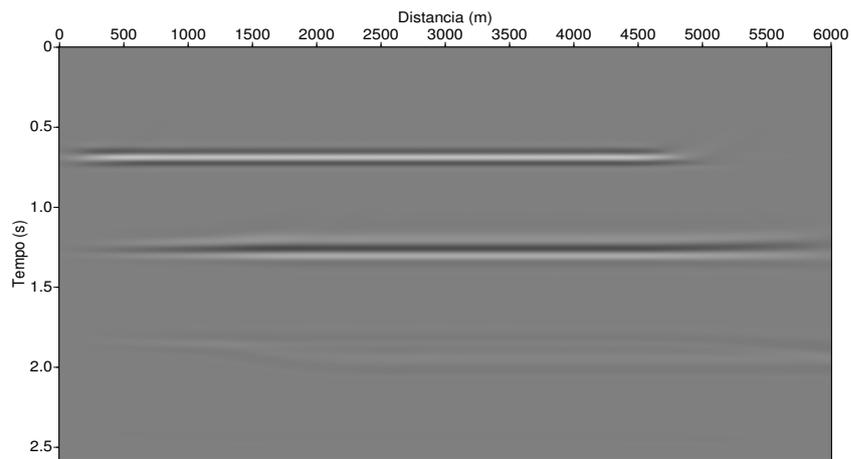
(b) Imagem com $\alpha = 70$ (c) Imagem com $\alpha = 100$

Figura 4.7: Modelo 1: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3×3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 70$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 100$, onde ainda havia a presença de múltipla.



(a) Imagem migrada

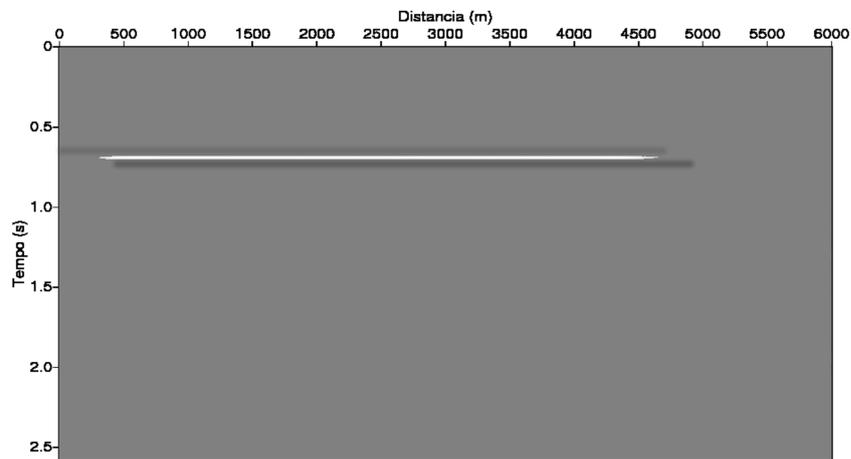
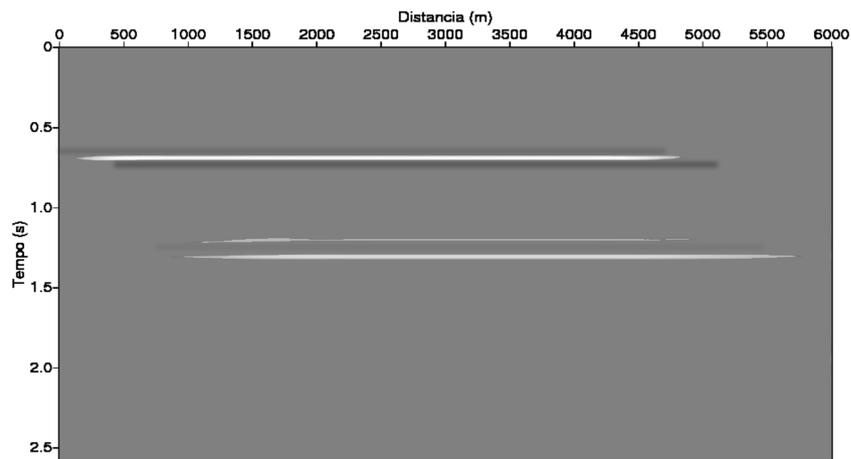
(b) Imagem com $\alpha = 75$ (c) Imagem com $\alpha = 100$

Figura 4.8: Modelo 1: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Lukaziewicz com a operação de dilatação, elemento estruturante 3×3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 75$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 100$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.7a com a Figura 4.7b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente sem modificação da amplitude da reflexão primária (Fig. 4.9a). No entanto, quando comparados os traços da Figura original 4.8a com a Figura filtrada 4.8b é possível notar que o método de Lukaziewicz também consegue atenuar a múltipla, porém há variações na amplitude do traço (Fig. 4.9b).

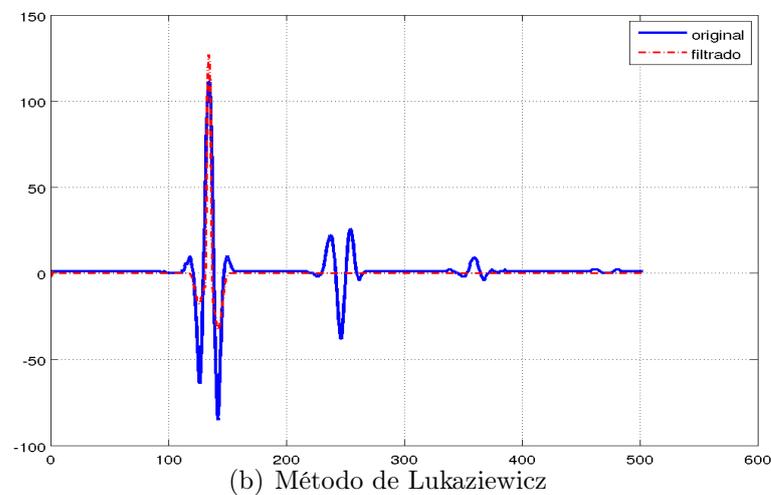
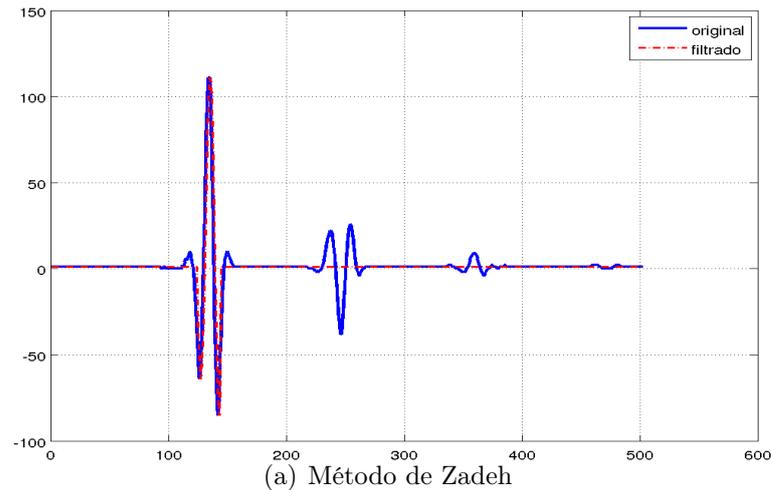


Figura 4.9: Modelo 1: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado. A Figura b) mostra a comparação entre os traços original e filtrado pelo método de Lukaziewicz e é possível notar que a amplitude do traço sofre uma variação pequena, mas, a múltipla foi totalmente atenuada.

4.3.2 Modelo 2 - Formado por dois Refletores Planos e Horizontais

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.10a e 4.10b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.11) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.12). Na Figura 4.13a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1^o e 2^o ordem nos tempos de 1s e 2s.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3x3 e tipo gaussiano.

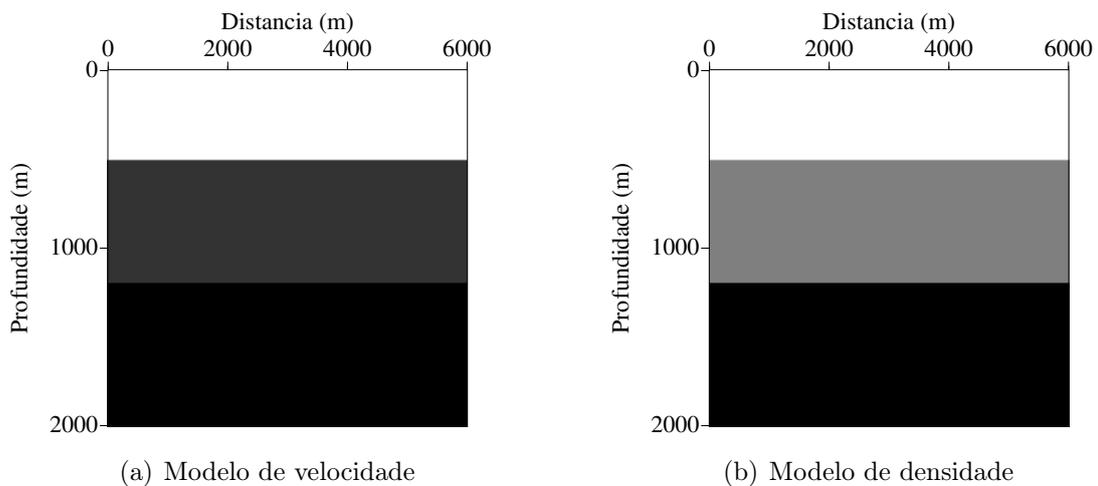


Figura 4.10: Modelo 2: onde a) representa o modelo de velocidade com três camadas sendo suas velocidades de 1500 m/s , 2300 m/s e 2500 m/s , respectivamente. b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 , 1.2 g/cm^3 e 1.4 g/cm^3 , respectivamente.

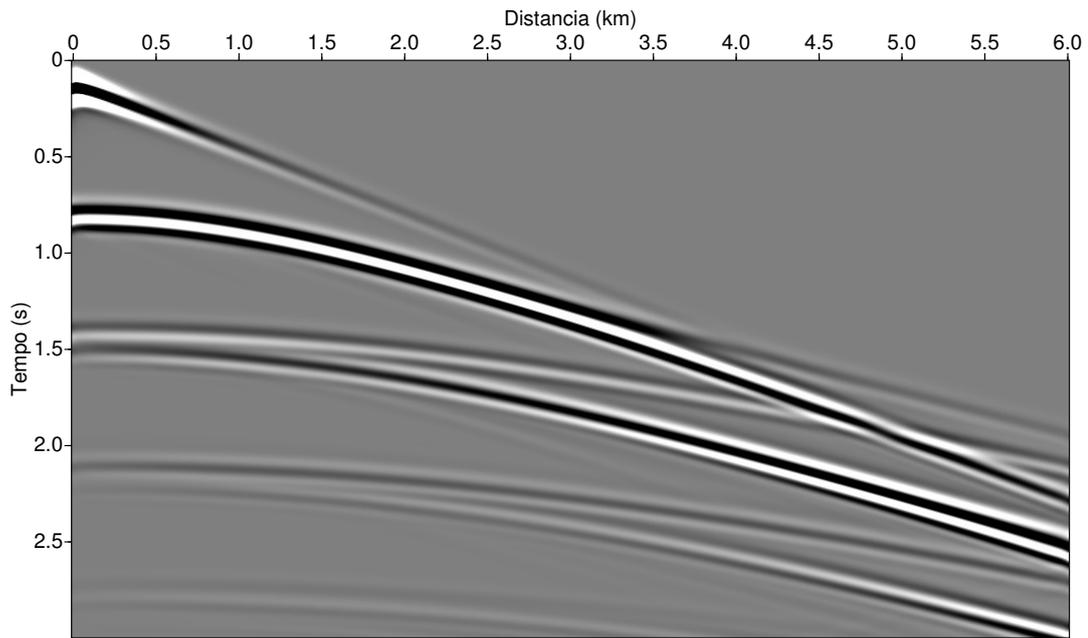


Figura 4.11: Modelo 2. Família de um tiro comum onde o refletores estão nos tempos de 0.7s e 1.5s, as múltiplas de 1^o e 2^o ordem estão por volta de 2.2s e 2.7s, respectivamente.

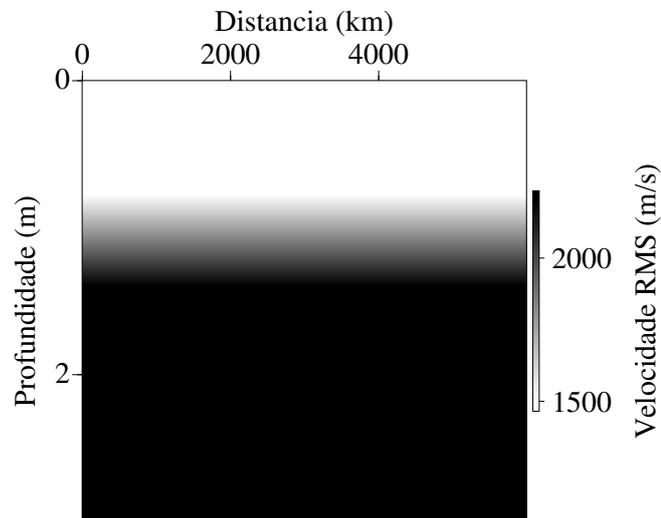
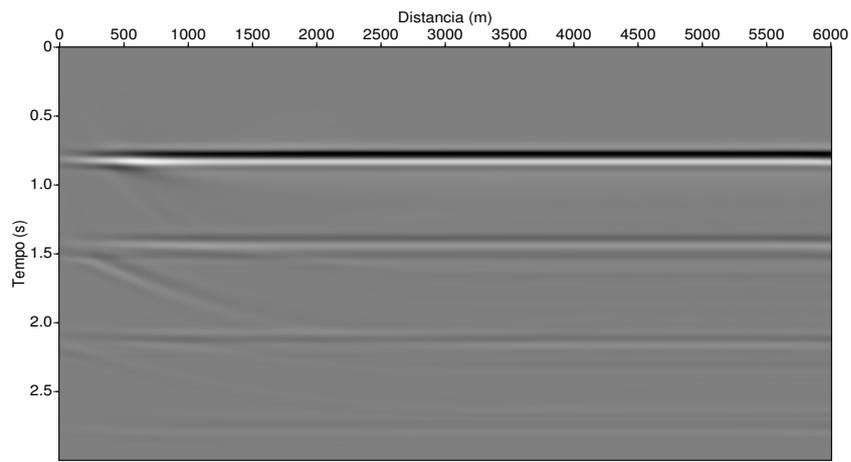


Figura 4.12: Modelo 2. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde as velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 2300 m/s .

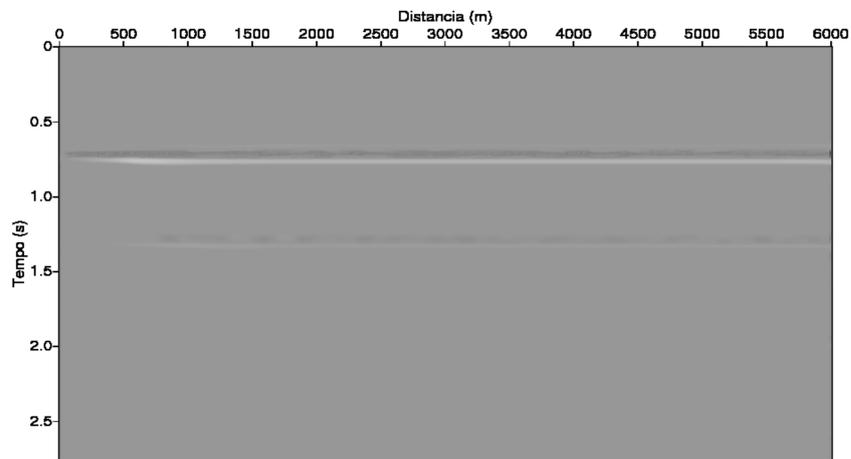
Nas Figuras 4.13a e 4.14a tem-se a seção migrada pós-empilhamento. Os dois refletores são visualizados nos tempos de 0.7s e 1.5s e suas múltiplas nos tempos de 2.2s e 2.7s, respectivamente. Da mesma forma que o Modelo 1 são mostrados os resultados da suavização pelos métodos de Zadeh e Lukaziewicz. Para cada um deles, dois valores para

o corte alfa são testados.

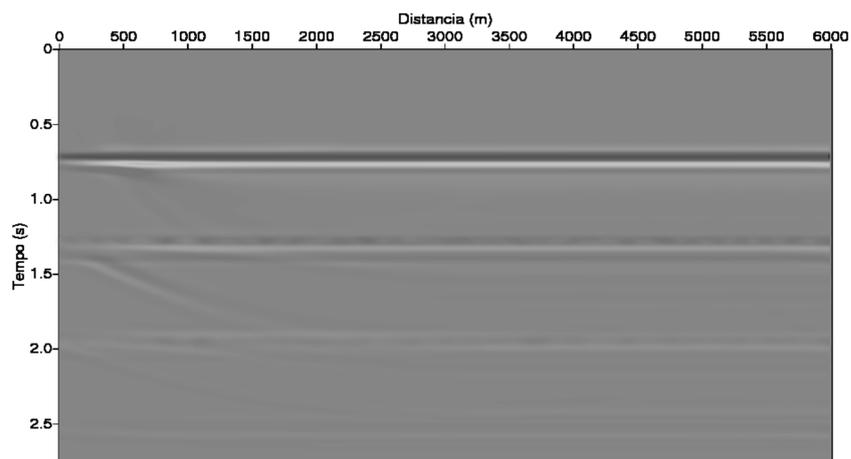
Para a suavização com o método de Zadeh o melhor resultado é obtido para o corte alfa igual à 105 (Fig. 4.13b), verifica-se que em comparação com o Modelo 1, o valor do corte alfa é diferente. Esse valor é influenciado pela complexidade da imagem. Quando comparado com o resultado da Figura 4.14b, o resultado da Figura 4.14c não atenua bem as múltiplas, é possível ver múltiplas nos tempos 2s e 2.7s. De forma diferente a do Modelo 1, os resultados usando a suavização pelo método de Lukaziewicz apresentam perda de resolução nos refletores. Quando comparados os resultados obtidos na suavização pelo método de Zadeh.



Dado migrado
(a) Imagem migrada

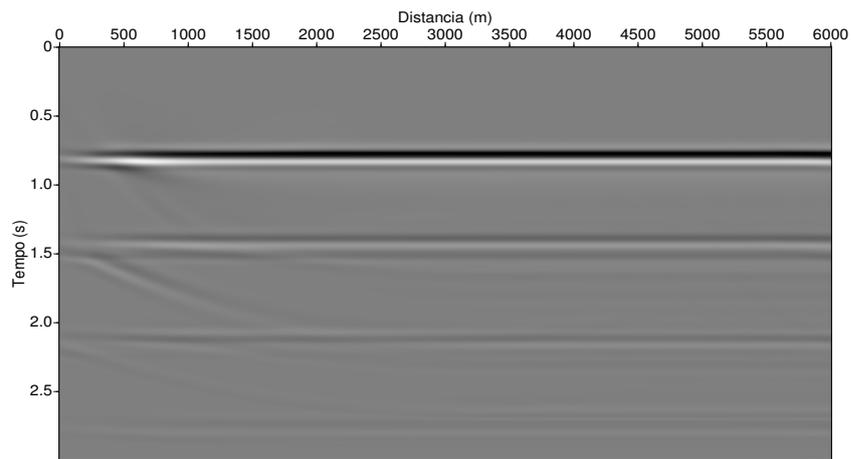


Dado migrado
(b) Imagem com $\alpha = 105$

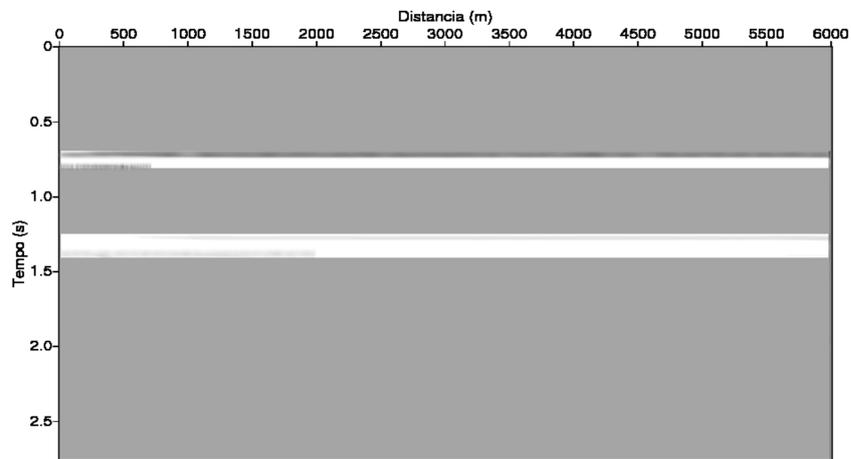


Dado migrado
(c) Imagem com $\alpha = 120$

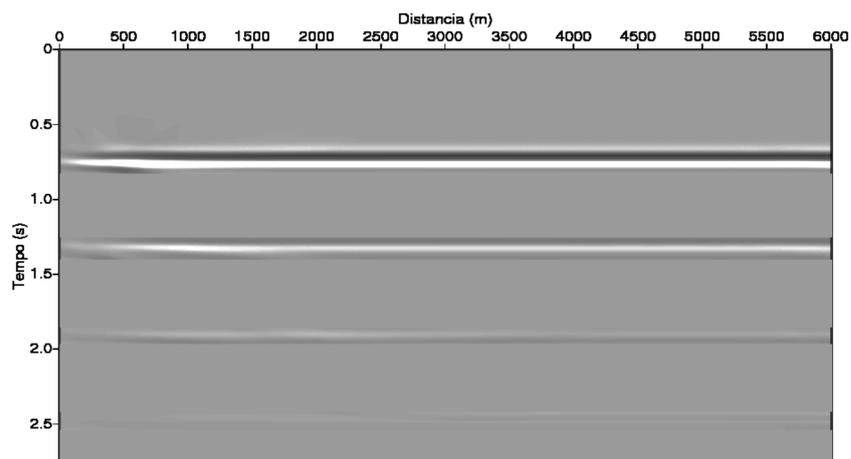
Figura 4.13: Modelo 2: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 105$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 120$, onde ainda havia a presença de múltipla.



Dado migrado
(a) Imagem migrada



Dado migrado
(b) Imagem com $\alpha = 140$



Dado migrado
(c) Imagem com $\alpha = 160$

Figura 4.14: Modelo 2: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Lukaziewicz com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 140$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 160$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.13a com a Figura 4.13b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente com atenuação leve da amplitude da reflexão primária (Fig. 4.15a). No entanto, quando comparados os traços da Figura original 4.14a com a Figura filtrada 4.14b) é possível notar que o método de Lukaziewicz também consegue atenuar a múltipla, porém há variações na amplitude do traço (Fig. 4.15b).

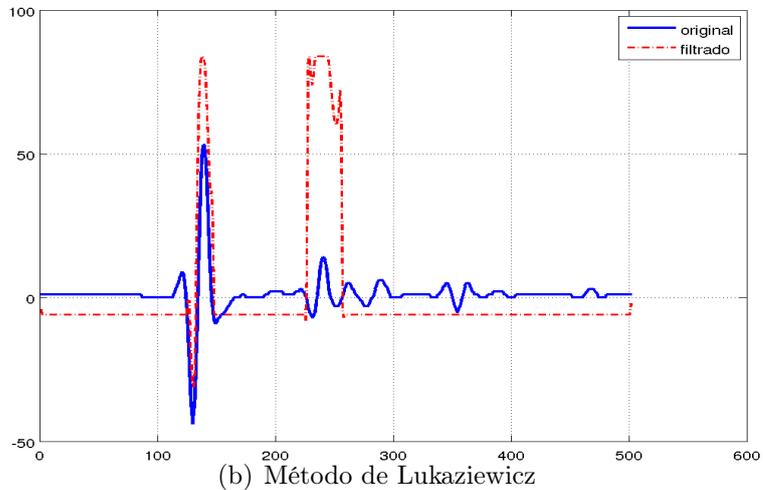
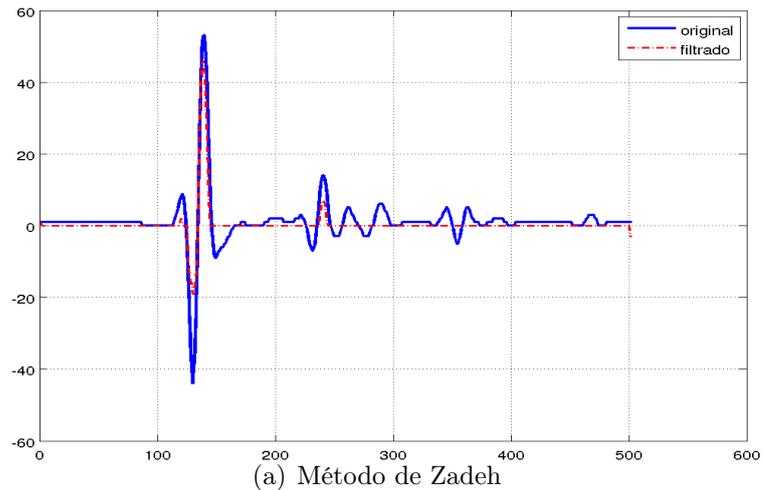


Figura 4.15: Modelo 2: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado. A Figura b) mostra a comparação entre os traços original e filtrado pelo método de Lukaziewicz e é possível notar que a amplitude do traço sofre uma perturbação grande, porém, a múltipla foi totalmente atenuada.

4.3.3 Modelo 3 - Formado por Múltiplos Refletores Planos e Horizontais

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.16a e 4.16b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.17) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.18). Na Figura 4.19a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1^o e 2^o ordem nos tempos de 1s e 2s.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3x3 e tipo gaussiano.

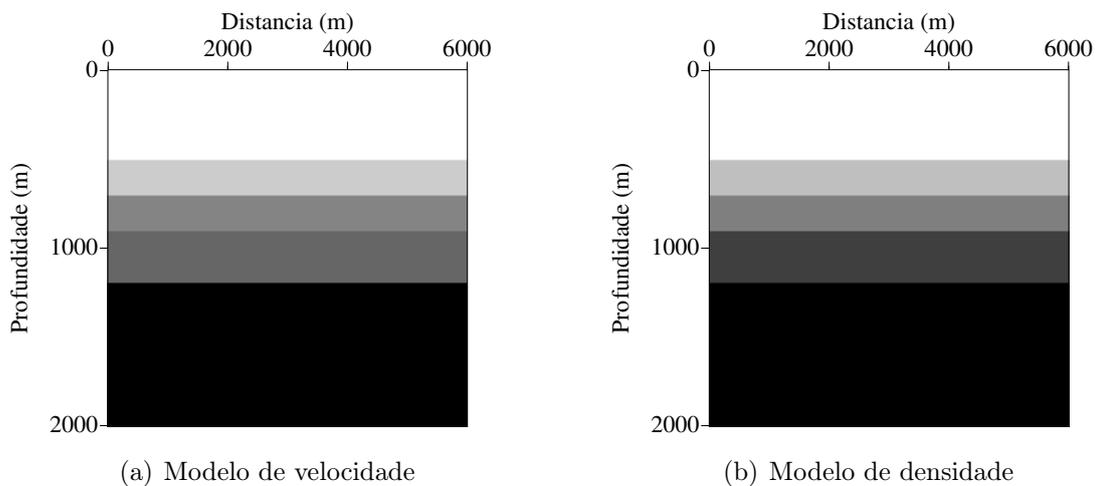


Figura 4.16: Modelo 3: A Figura a) representa o modelo de velocidade com cinco camadas sendo suas velocidades de 1500 m/s , 2200 m/s , 3000 m/s , 4000 m/s e 5000 m/s , respectivamente. b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 , 1.1 g/cm^3 , 1.2 g/cm^3 , 1.3 g/cm^3 e 1.4 g/cm^3 , respectivamente.

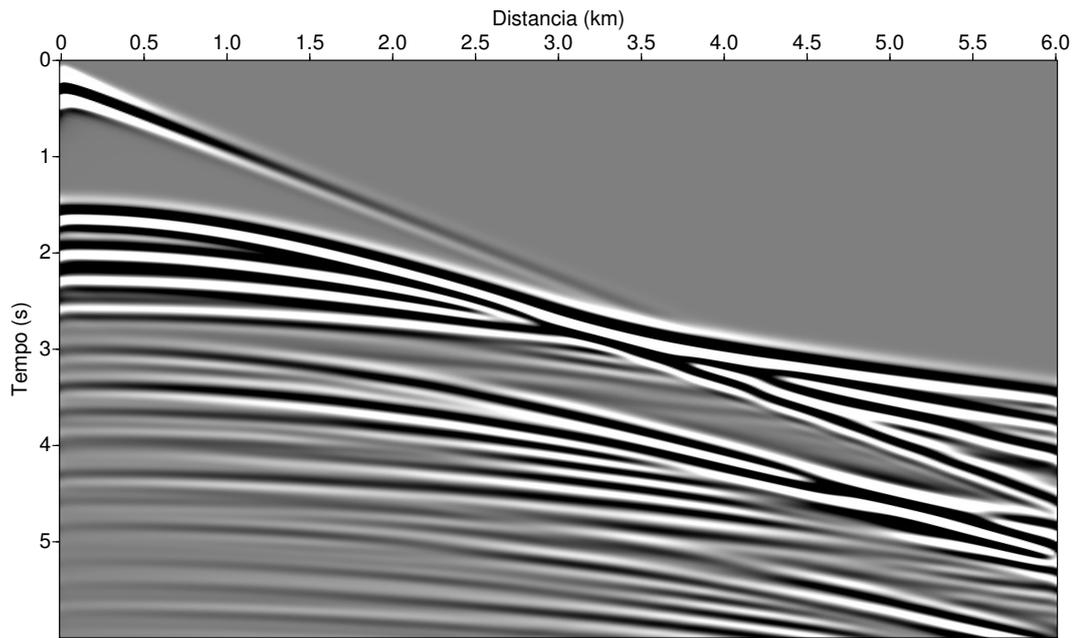


Figura 4.17: Modelo 3. Família de um tiro comum onde os refletores de interesse estão entre os tempos 1.5s até 2.8s. As múltiplas estão entre 3s e 6s.

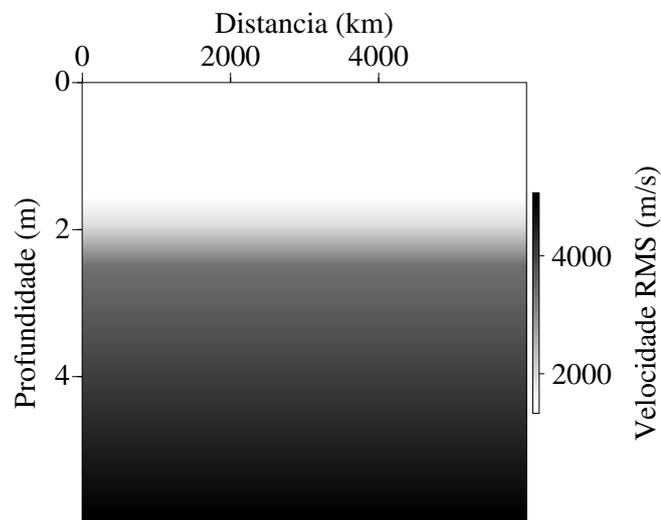
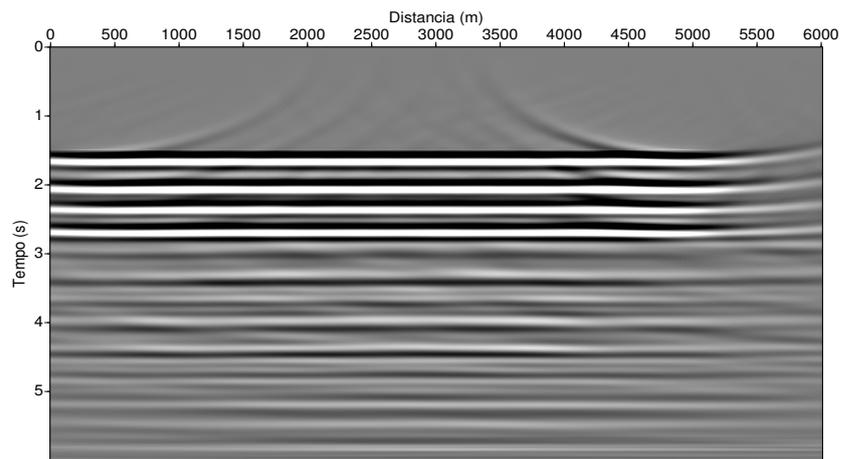


Figura 4.18: Modelo 3. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde as velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 5000 m/s .

Nas Figuras 4.19a e 4.20a tem-se a seção migrada pós-empilhamento. Os quatro refletores são visualizados nos tempos de 1.5ss, 1.9s, 2.2s e 2.5s. Suas múltiplas entre os tempos de 3s e 6s, respectivamente. Da mesma forma que o Modelo 1 são mostrados os resultados da suavização pelos métodos de Zadeh e Lukaziewicz. Para cada um deles, dois

valores para o corte alfa são testados.

Para a suavização com o método de Zadeh o melhor resultado é obtido para o corte alfa igual à 85 (Fig. 4.19b), verifica-se que em comparação com o Modelo 1, o valor do corte alfa é diferente. Quando comparado com o resultado da Figura 4.20b, o resultado da Figura 4.20c não atenua bem as múltiplas, é possível ver resquícios das múltiplas entre os tempos 3s e 6s. Da mesma forma que no Modelo 2, os resultados usando a suavização pelo método de Lukaziewicz apresentam perda de resolução nos refletores. Quando comparados aos resultados obtidos na suavização pelo método de Zadeh. Para os demais modelos só a suavização pelo método de Zadeh mostrou resultados promissores.



(a) Imagem migrada

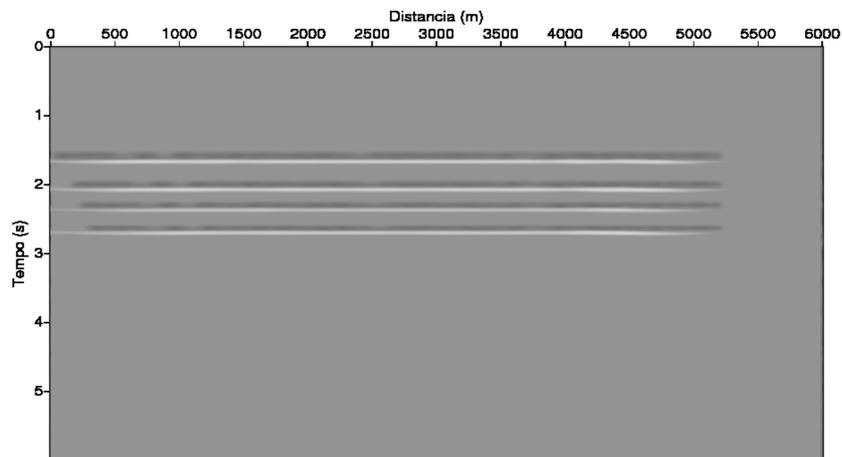
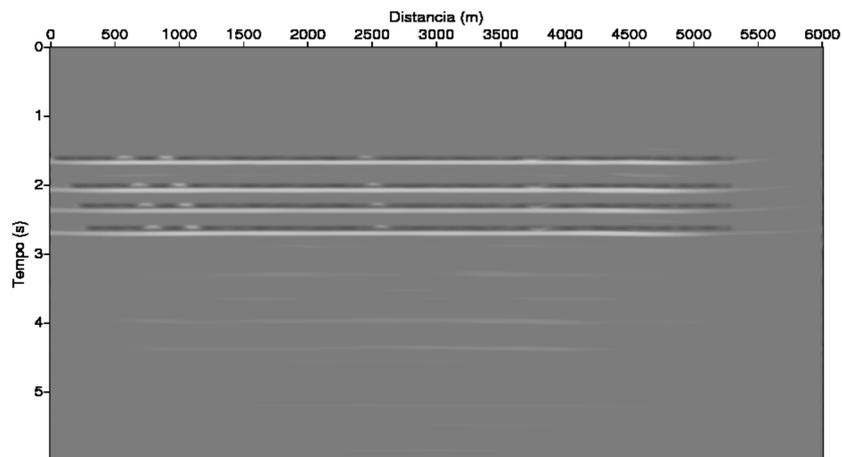
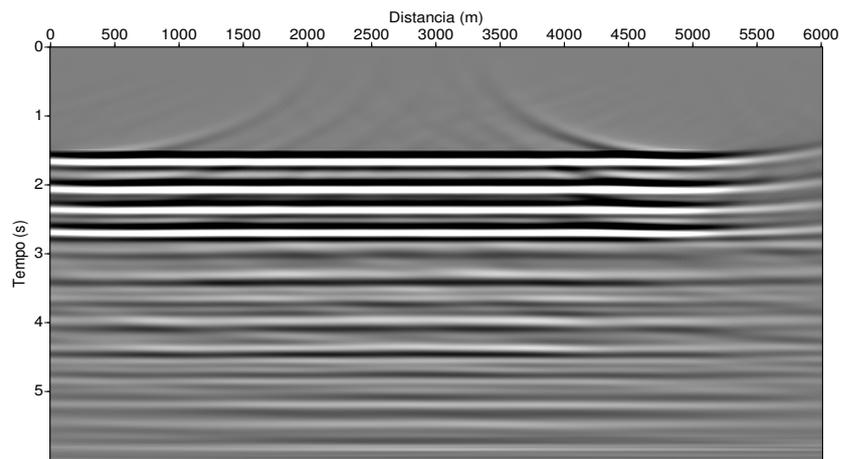
(b) Imagem com $\alpha = 85$ (c) Imagem com $\alpha = 100$

Figura 4.19: Modelo 3: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 85$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 100$, onde ainda havia a presença de múltipla.



(a) Imagem migrada

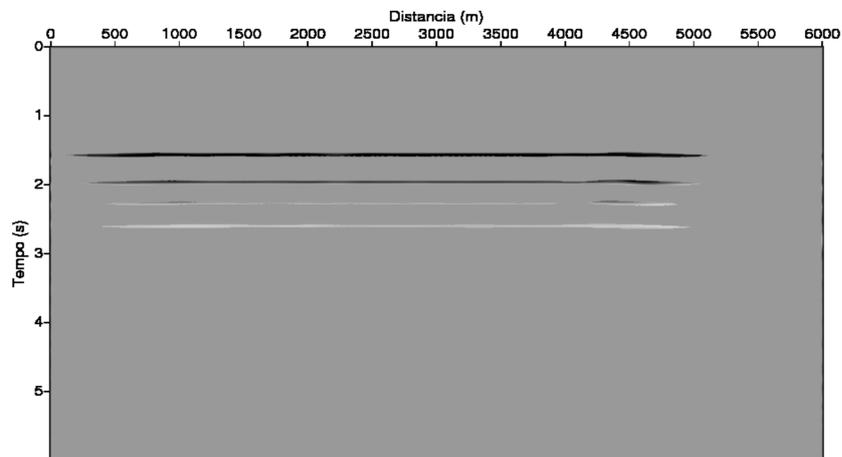
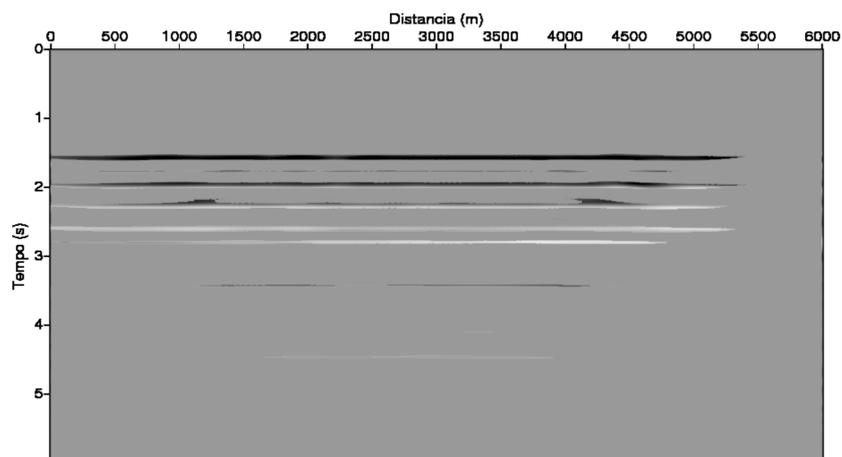
(b) Imagem com $\alpha = 110$ (c) Imagem com $\alpha = 130$

Figura 4.20: Modelo 3: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Lukaziewicz com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 110$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 130$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.19a com a Figura 4.19b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente com atenuação leve da amplitude da reflexão primária (Fig. 4.21a). No entanto, quando comparados os traços da Figura original 4.20a com a Figura filtrada 4.20b) é possível notar que o método de Lukaziewicz também consegue atenuar a múltipla, porém, há variações na amplitude do traço e deslocamento espacial do mesmo (Fig. 4.21b).

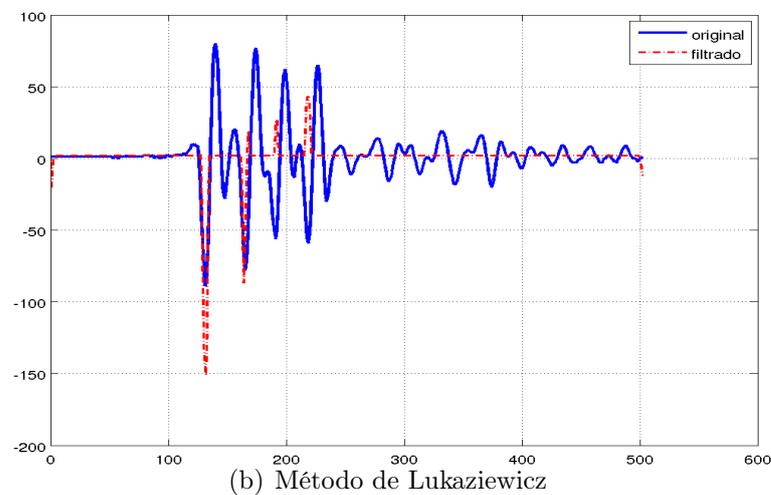
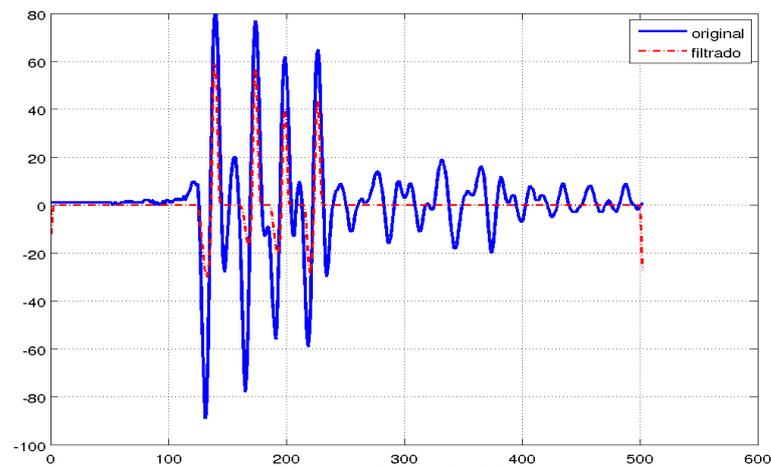


Figura 4.21: Modelo 3: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado. A Figura b) mostra a comparação entre os traços original e filtrado pelo método de Lukaziewicz e é possível notar que a amplitude do traço sofre uma perturbação grande, porém, a múltipla foi totalmente atenuada.

4.3.4 Modelo 4 - Formado por um Refletor Inclinado com 5°

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.22a e 4.22b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.23) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.24). Na Figura 4.25a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1° e 2° ordem nos tempos de 1s e 2s.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3×3 e tipo gaussiano.

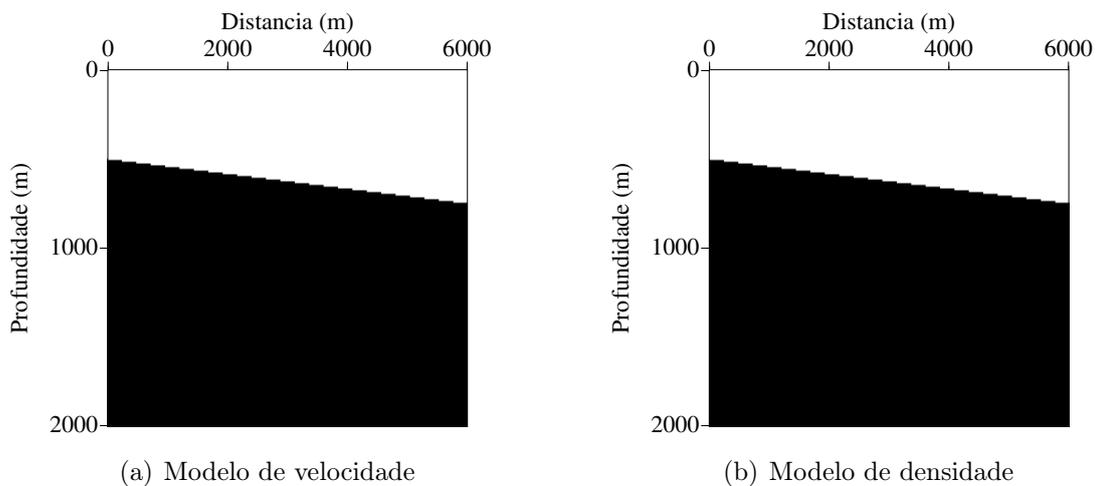


Figura 4.22: Modelo 4: A Figura a) representa o modelo de velocidade onde a primeira camada tem velocidade de 1500 m/s e a segunda camada de 2300 m/s . b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 e 1.2 g/cm^3 , respectivamente.

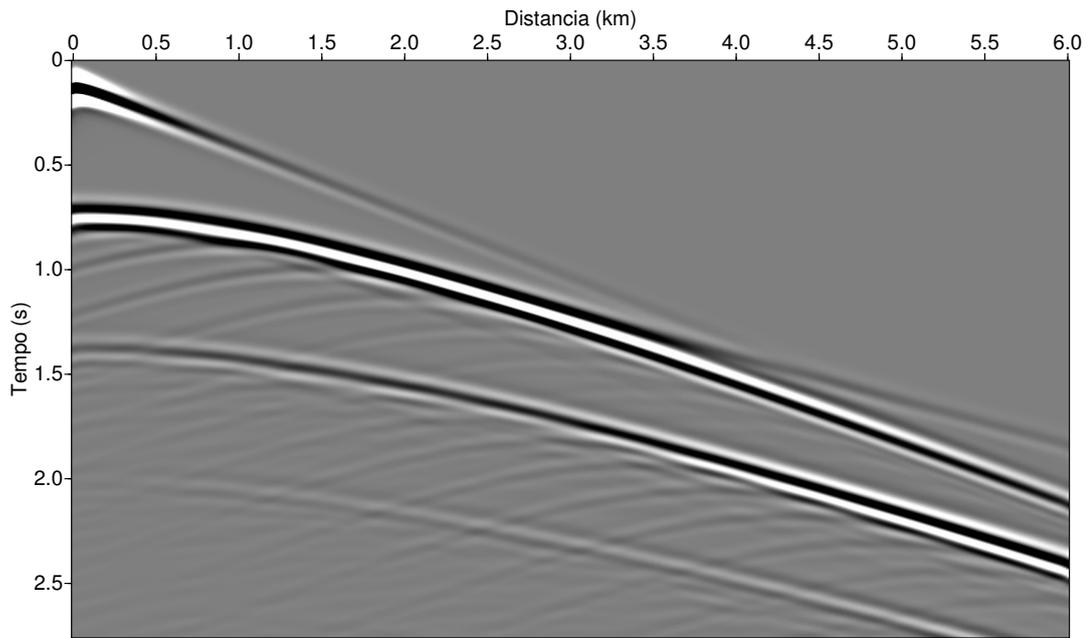


Figura 4.23: Modelo 4. Família de um tiro comum onde o refletor aparece a partir do tempo de 0.7s aproximadamente. As múltipla de 1^o e 2^o ordem são visualizadas nos tempos de 1.4s e 2s, respectivamente.

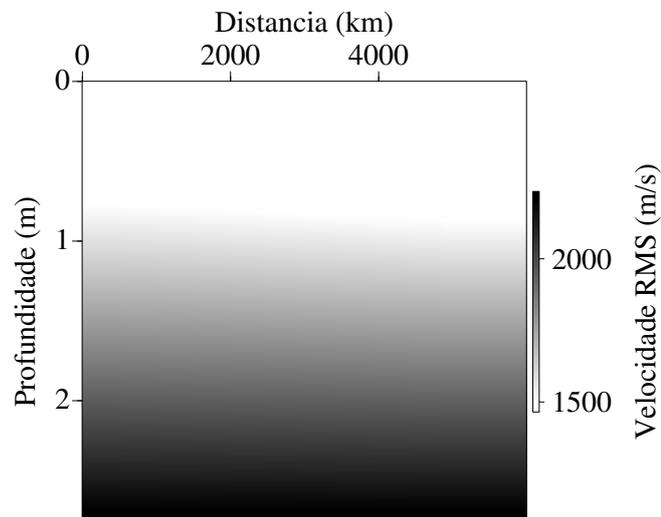
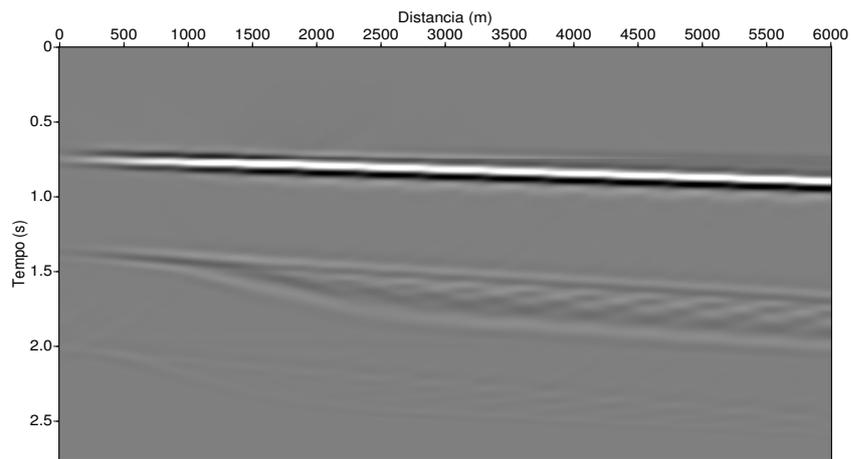


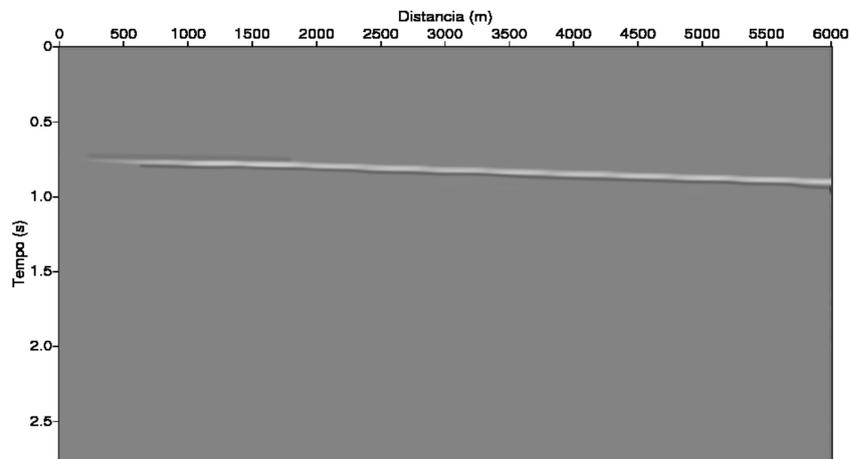
Figura 4.24: Modelo 4. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde a velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 2300 m/s .

A seção migrada pós-empilhamento é mostrada na Figura 4.25a. A múltipla de 1^o ordem é visualizada a partir do tempo de 1.4s aproximadamente. Artefatos associados à múltipla são também visualizados a partir do afastamento de 700 m . A múltipla de

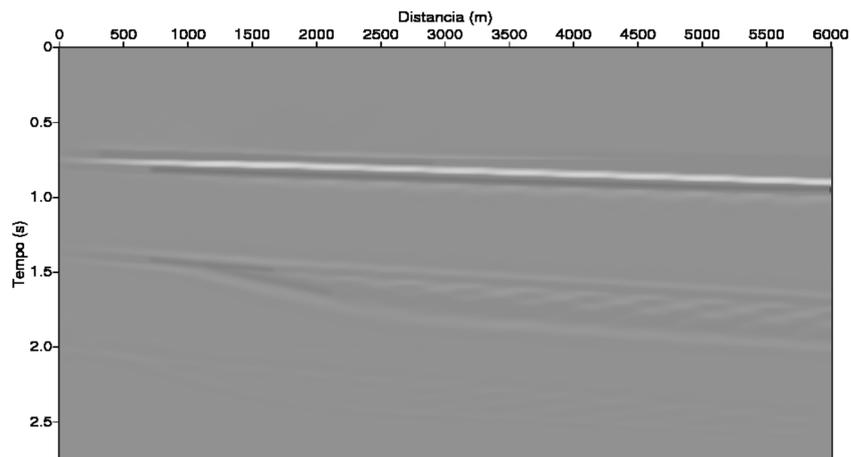
2^o ordem aparece mais fraca e a partir do tempo de 2s. Acredita-se que a mesma é atenuada devido ao processamento realizado. Nas Figuras 4.25a e 4.25b, a filtragem usando a morfologia matemática é feita. Verifica-se que o corte alfa é decisivo para o melhor resultado da atenuação das múltiplas, o que pode ser visto na Figura 4.25b.



Dado migrado
(a) Imagem migrada



Dado migrado
(b) Imagem com $\alpha = 100$



Dado migrado
(c) Imagem com $\alpha = 115$

Figura 4.25: Modelo 4: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 100$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 115$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.25a com a Figura 4.25b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente com atenuação leve da amplitude da reflexão primária (Fig. 4.26a).

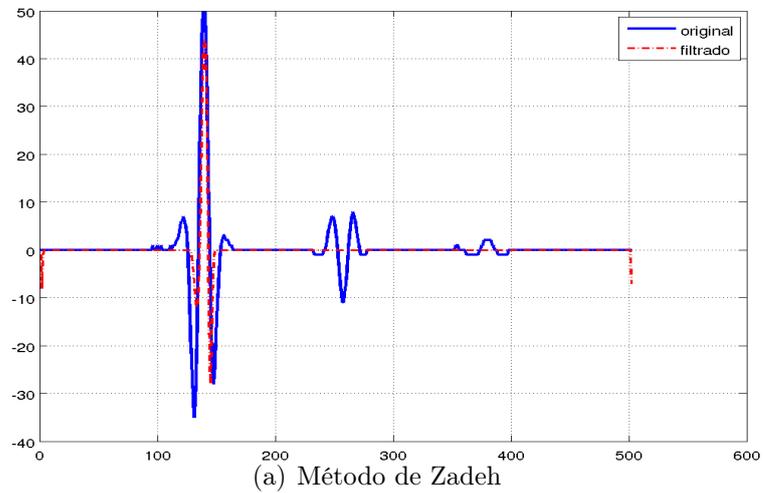


Figura 4.26: Modelo 4: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado.

4.3.5 Modelo 5 - Formado por um Refletor Curvo com Mergulho de 20°

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.27a e 4.27b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.28) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.29). Na Figura 4.30a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1^o e 2^o ordem nos tempos de 1s e 2s.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3x3 e tipo gaussiano.

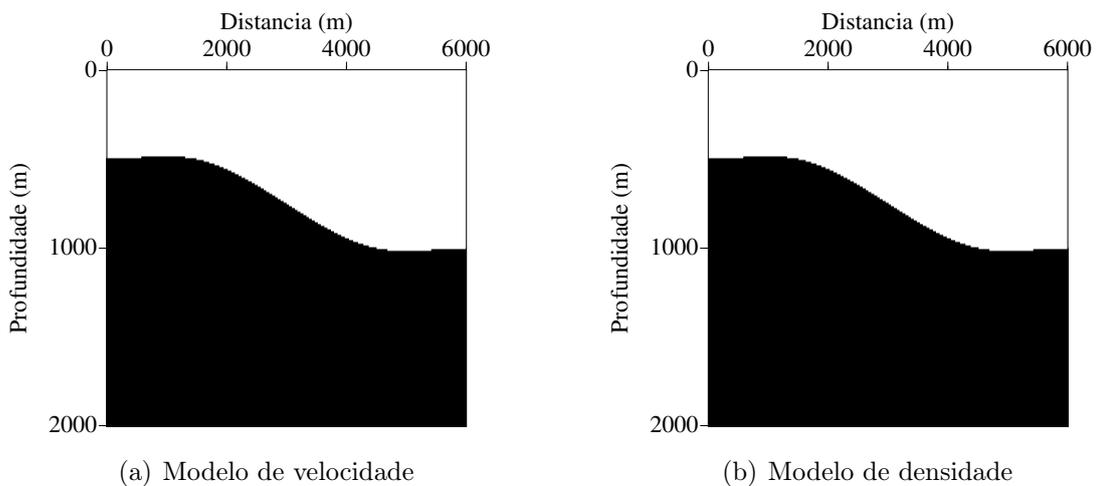


Figura 4.27: Modelo 5: A Figura a) representa o modelo de velocidade onde a primeira camada tem velocidade de 1500 m/s e a segunda camada de 2300 m/s . b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 e 1.2 g/cm^3 , para cada camada.

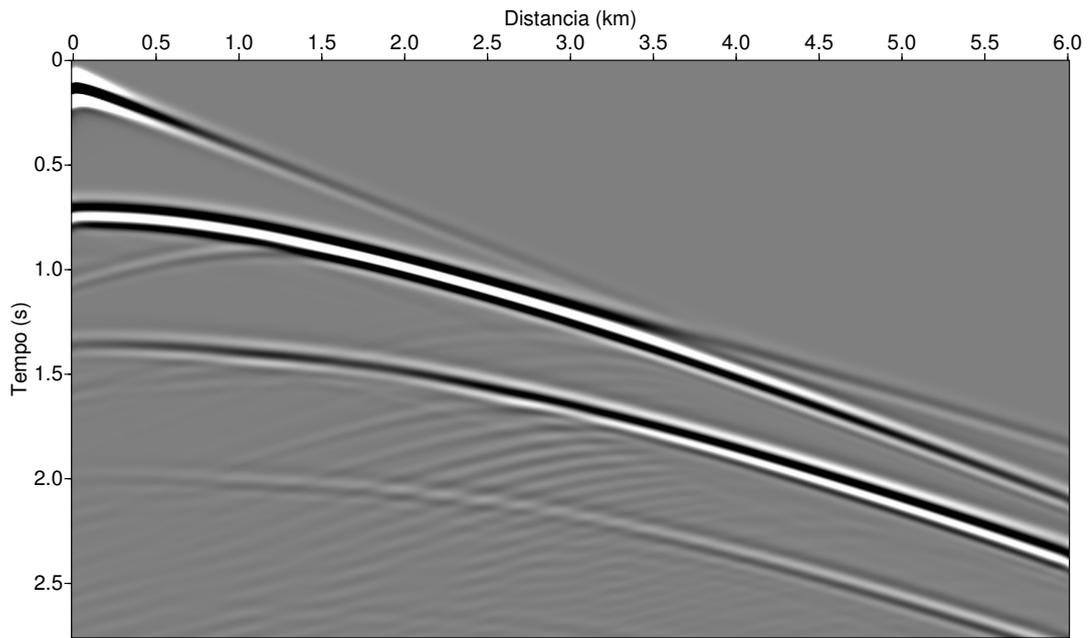


Figura 4.28: Modelo 5. Família de um tiro comum onde o refletor começa no tempo 0.7s. As múltiplas podem ser vistas a partir de 1s.

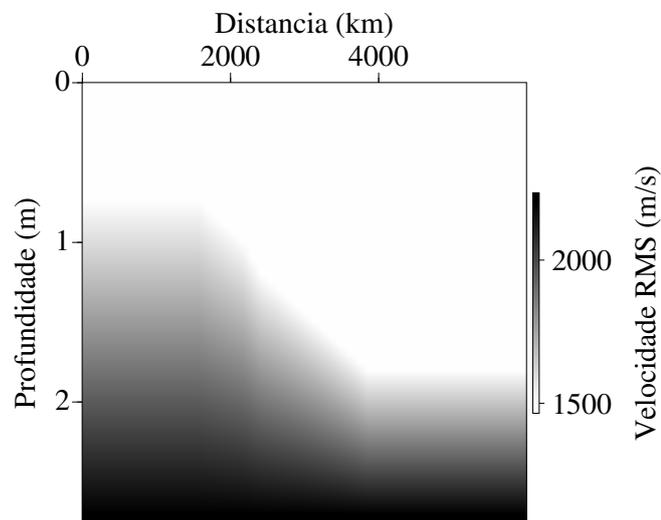
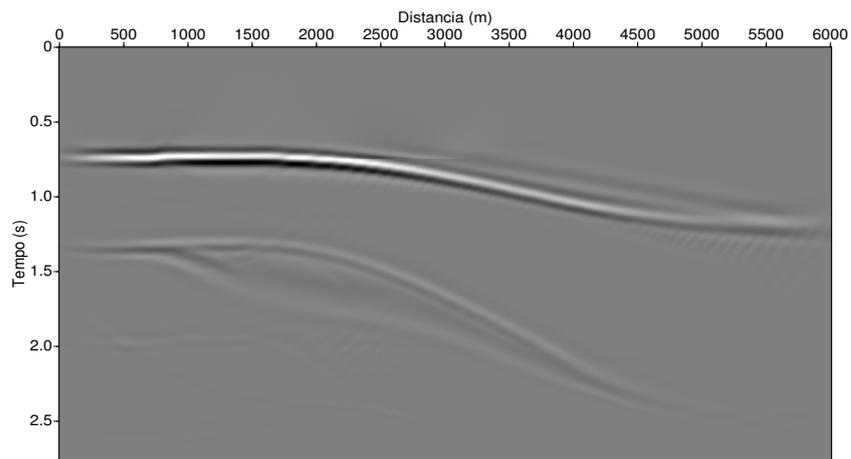


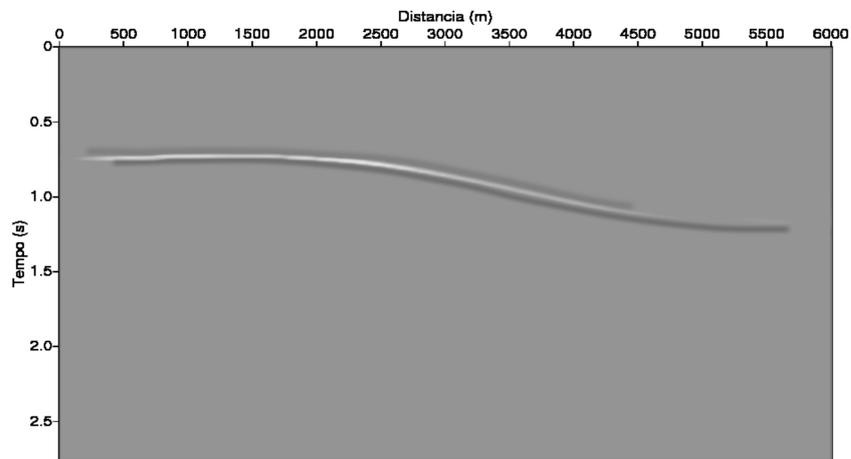
Figura 4.29: Modelo 5. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde a velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 2300 m/s .

A seção migrada pós-empilhamento em tempo é vista na Figura 4.30a. O refletor aparece a partir do tempo de 0.7s. A múltipla em 1.4s. A parte inclinada do evento de múltipla apresenta inclinação maior que a do refletor, como já esperado (ver Capítulo 2). Os resultados da aplicação da morfologia matemática são apresentados nas Figuras 4.30b

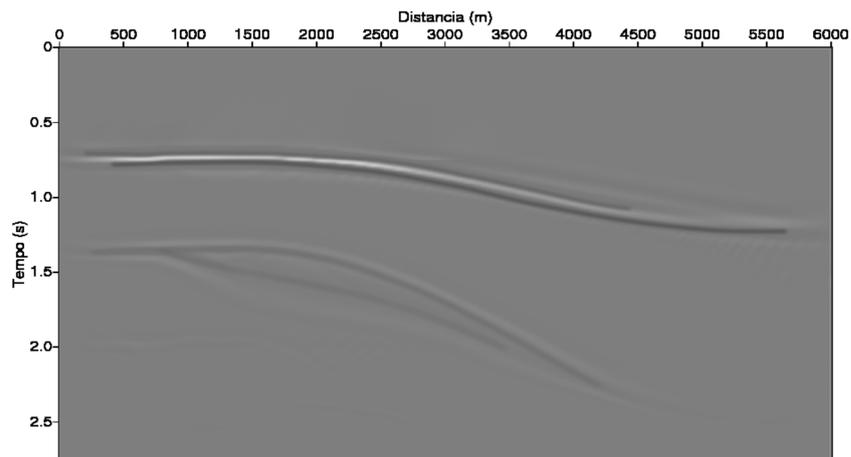
e 4.30c, como no resultado do modelo anterior, o corte alfa influencia na atenuação da múltipla. O melhor resultado é obtido na Figura 4.30b para o corte alfa igual à 100 com suavização pelo método de Zadeh.



Dado migrado
(a) Imagem migrada



Dado migrado
(b) Imagem com $\alpha = 100$



Dado migrado
(c) Imagem com $\alpha = 115$

Figura 4.30: Modelo 5: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 100$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 115$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.30a com a Figura 4.30b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente (Fig. 4.31a).

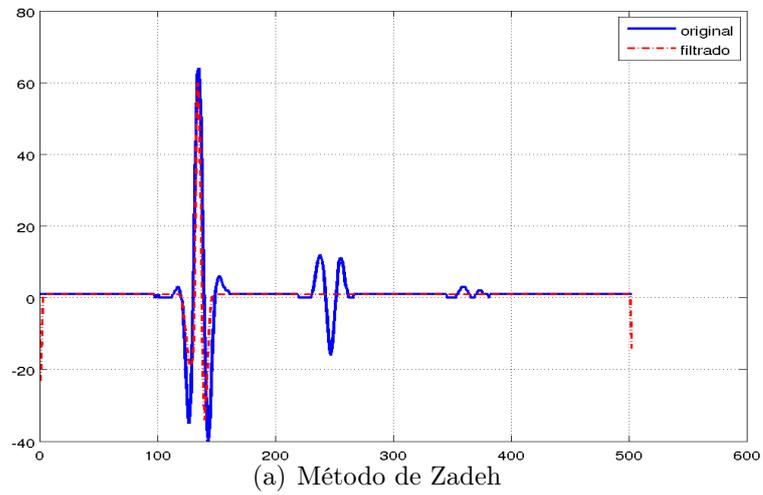


Figura 4.31: Modelo 5: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado.

4.3.6 Modelo 6 - Formado por um Refletor em Sinclinal

Foram gerados os modelos de referência de velocidade e densidade conforme as Figuras 4.32a e 4.32b, respectivamente. Na segunda etapa foi feita a aquisição por diferenças finitas baseado nos parâmetros da Tabela 4.2 gerando as famílias de tiro comum (veja a Fig. 4.33) que mostra o primeiro tiro. Aos dados sísmicos foi aplicado o fluxograma de processamento da Figura 4.1, sendo que para a migração foi utilizado o campo de velocidade RMS estimado com o pacote Seismic Unix (Stockwell, 2012) (Fig. 4.34). Na Figura 4.35a, tem-se a seção migrada em escala de cinza, onde verifica-se a existência de múltiplas de 1^o e 2^o ordem nos tempos de 1s e 2s.

Na etapa de filtragem, para a eliminação de eventos como múltiplas, foi utilizado o pacote de Processamento Digital de Imagem com a morfologia matemática fuzzy. Os testes com as operações de dilatação e erosão da morfologia matemática foram realizados baseados nos métodos de Zadeh e Lukaziewicz, onde para o corte alfa os valores estão entre 0 e 255, que determinam a altura (pico) do elemento estruturante (Figs. 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 do Capítulo 3), com o tamanho de 3x3 e tipo gaussiano.

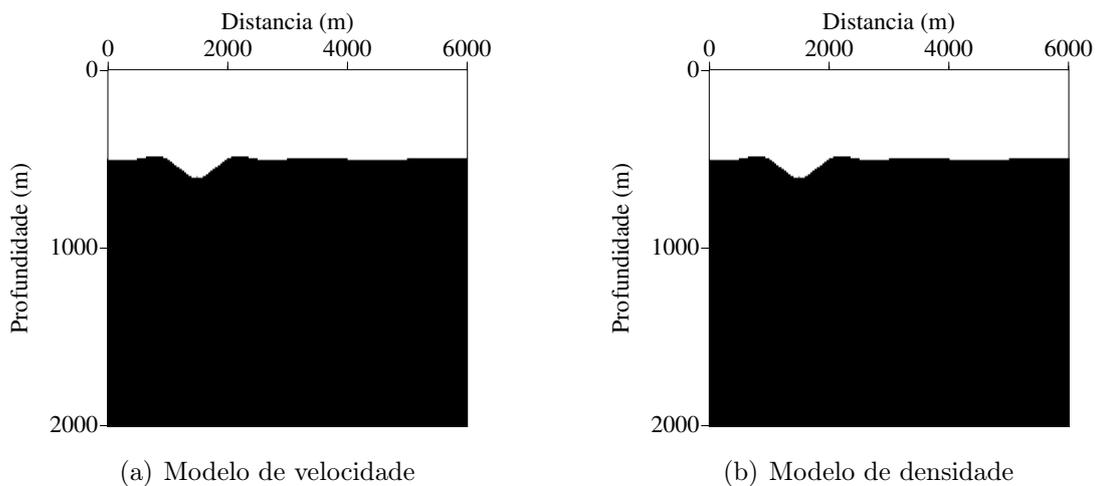


Figura 4.32: Modelo 6: A Figura a) representa o modelo de velocidade onde a primeira camada tem velocidade de 1500 m/s e a segunda camada de 2300 m/s . b) representa o modelo de densidade com valores de 1 g/cm^3 e 1.2 g/cm^3 , para cada camada.

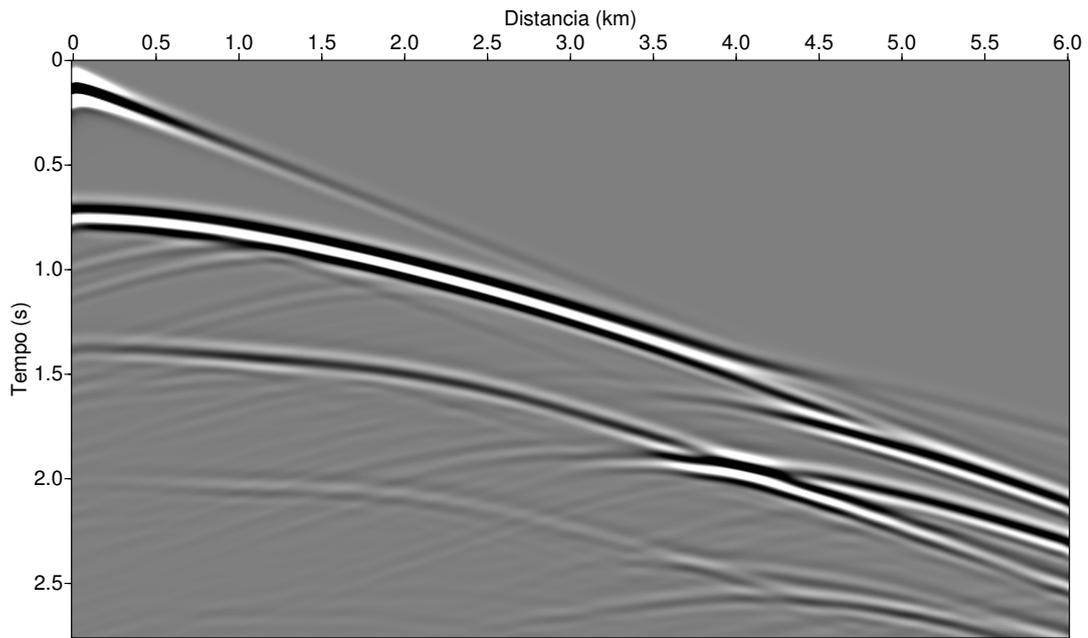


Figura 4.33: Modelo 6. Família de um tiro comum o refletor é visto a partir do tempo de 0.7s. As múltiplas estão entre 1s e 2.5s.

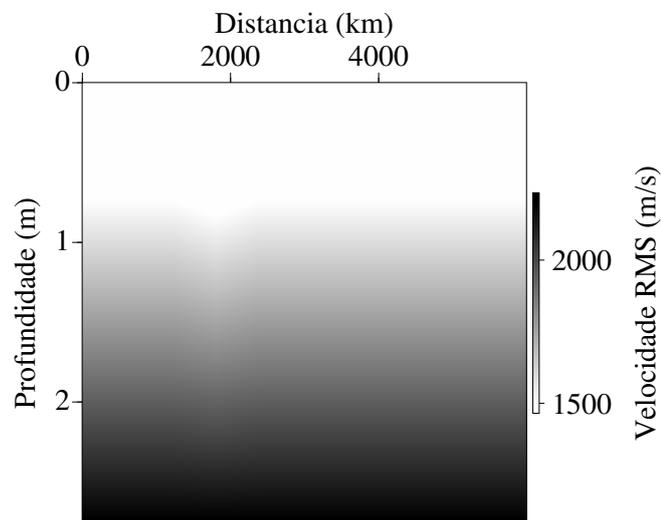
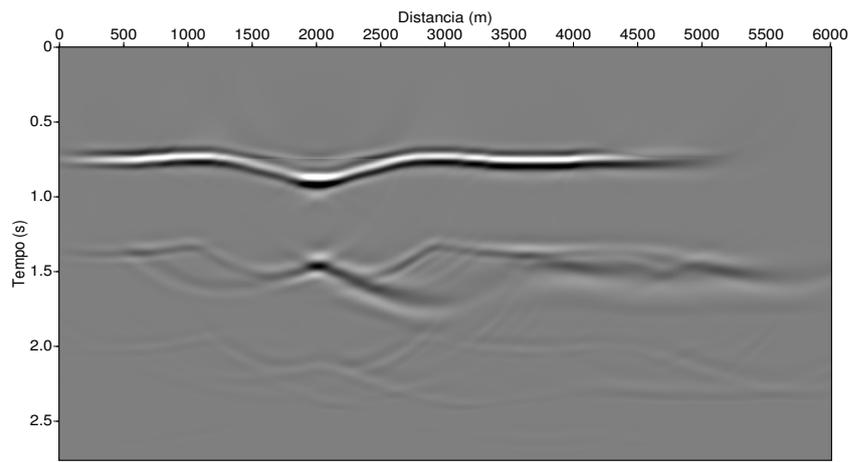


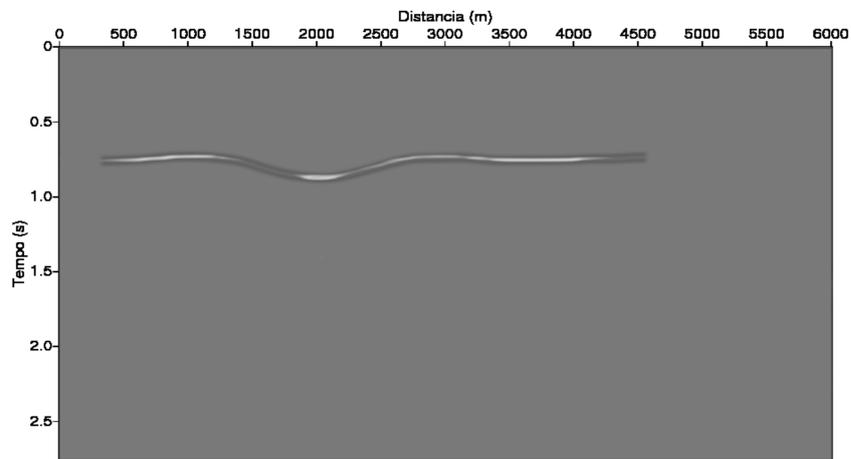
Figura 4.34: Modelo 6. Campo de velocidade estimada após a análise de velocidade onde as velocidade mínima e máxima estão entre 1500 m/s e 2300 m/s .

A seção migrada pós-empilhamento é vista na Figura 4.35a. O refletor desaparece ao se aproximar das bordas da seção, acredita-se que isto deva-se a efeitos do muting utilizado na etapa do empilhamento. As múltiplas de 1^o e 2^o ordem podem ser visualizadas logo abaixo, a partir do tempo de 1.4s e 2s, respectivamente. Diversos artefatos são gerados devido

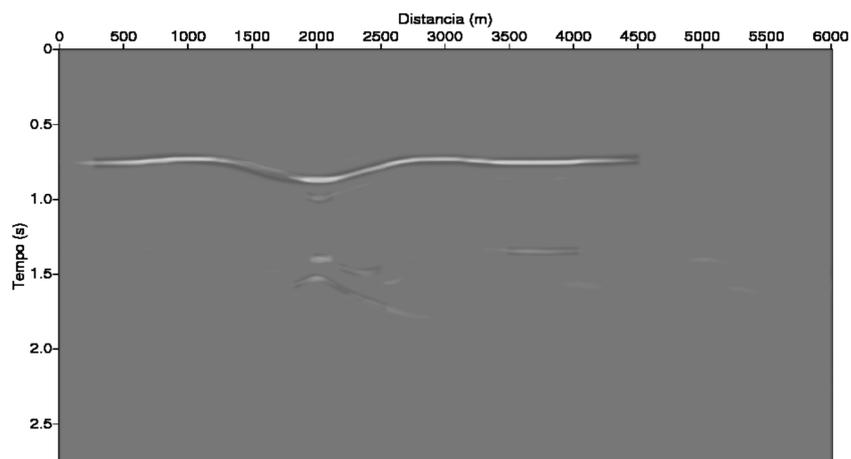
ao refletor ser em sinclinal (região a partir do afastamento de $1.000m$). Os resultados da filtragem da morfologia matemática são mostrados nas Figuras 4.35b e 4.35c. A primeira Figura (4.35b) com o melhor resultado, foi aplicada a suavização pelo método de Zadeh, com o corte alfa igual à 80.



Dado migrado
(a) Imagem migrada



Dado migrado
(b) Imagem com $\alpha = 80$



Dado migrado
(c) Imagem com $\alpha = 100$

Figura 4.35: Modelo 6: Imagens com: a) migração em tempo, com dados CMP pós-empilhados. Aplicando o filtro pelo método de Zadeh com a operação de erosão, elemento estruturante 3x3 do tipo gaussiano, temos as Figuras b) com $\alpha = 80$, onde a múltipla foi totalmente removida e c) com $\alpha = 100$, onde ainda havia a presença de múltipla.

Quando comparados os traços da Figura original 4.35a com a Figura 4.35b é possível ver que a aplicação da método de Zadeh mostrou-se eficiente pois atenuou a múltipla completamente (Fig. 4.36a).

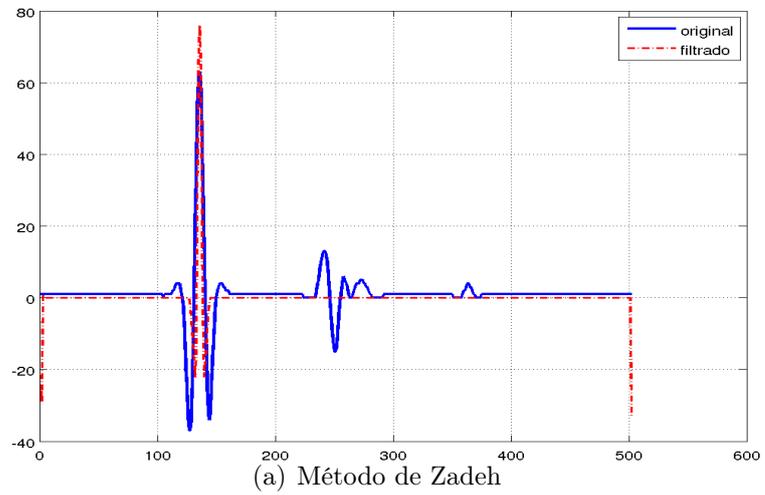


Figura 4.36: Modelo 6: Figura a) após a filtragem pelo método de Zadeh é possível ver que as múltiplas foram atenuadas quando são comparados os traços original e filtrado.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta a morfologia matemática como uma ferramenta para a filtragem de múltiplas de superfície livre. Foi apresentado um breve resumo sobre os tipos e características das reflexões múltiplas. Em seguida foi feita uma revisão teórica sobre a morfologia matemática (binária, em níveis de cinza e fuzzy), onde destacamos os métodos de Zadeh e Lukaziewicz, no tratamento dos pixels das imagens. Para verificar a aplicação dos métodos de Zadeh e Lukaziewicz nas imagens sísmicas, como filtros, foram realizados testes sintéticos com refletores de diferentes geometrias, considerando apenas dois operadores da morfologia matemática (erosão e dilatação) como suavizadores das reflexões múltiplas de superfície livre. Os modelos sintéticos foram gerados no software livre Seismic Unix (Stockwell, 2012).

A morfologia matemática foi testada com diferentes parâmetros (tamanho do elemento estruturante, tipo do elemento estruturante, alfa nível) e suavizadores (erosão e dilatação). O melhor resultado foi obtido com a suavização pelo método de Zadeh (suavizador - erosão) com os parâmetros: tipo do elemento estruturante (gaussiano), tamanho do elemento estruturante (3x3), alfa nível entre 70 e 115 e forma geométrica do refletor. Testes com dados reais foram feitos, entretanto a aplicação desta metodologia não apresentou resultados satisfatórios, o que mostra que esta metodologia ainda necessita de ajustes para aplicações aos dados sísmicos reais.

Quando o modelo apresenta mais de uma camada plana horizontal, os resultados obtidos pelo método de Zadeh se mostrou mais eficaz quando comparado com o método de Lukaziewicz. Porém, ainda sim, há diferenças entre as duas metodologias. O método de Zadeh consegue distinguir as interfaces sem perder a fase positiva. Já, o método de Lukaziewicz distingue as interfaces, mas, acaba perdendo a fase positiva na maioria dos casos.

Quando os refletores apresentam mergulho ou certa complexidade apenas o método de Zadeh produz resultados satisfatórios, onde as múltiplas de superfície livre são removidas totalmente, com relação a operação de erosão. Para todos os modelos apresentados foram feitos testes também com adição de ruído de 20 por cento nos traços, os mesmos resultados foram obtidos. Isso mostrou que os métodos apresentam robustez a ruídos moderados dos dados sintéticos. A tonalidade dos resultados finais depende exclusivamente da relação matemática e dos parâmetros utilizados. A morfologia matemática foi aplicada as imagens da seção migrada. Desta forma neste trabalho a filtragem foi feita diretamente na imagem.

A utilização desta metodologia ficou limitada as imagens migradas, isto restringe a aplicação da morfologia matemática ao dado sísmico em outras etapas do processamento, esta é a maior limitação da forma como a metodologia foi aplicada neste trabalho. Entretanto para a aplicação em imagens já processadas e como etapa final de visualização a

metodologia empregada apresentou resultados satisfatórios nos testes feitos em refletores de formas diversas.

Então como trabalhos futuros pode-se pensar em:

- Considerar que o elemento estruturante pode variar com a profundidade assim como seus parâmetros (tamanho, tipo e alfa nível) pois como o sinal vai perdendo a amplitude com a profundidade, poderia ser uma forma de compensar.
- Considerar que o elemento estruturante tem a forma da fonte pois como foi visto ele poderá assumir a forma de uma função conhecida.
- Considerar diferentes tipos de elementos estruturantes por setores da imagem assim como seus parâmetros (tamanho, tipo e alfa nível) pois para dados mais complexos poderá ser necessário o uso de diferentes formas do elemento estruturante que irá depender da complexidade geológica local.
- Utilizar a morfologia matemática diretamente nos dados sísmicos ao invés de aplicar na imagem, permitindo assim que após sua aplicação outras metodologias de processamento possam ser utilizadas no dado resultante. Um exemplo seria utilizar uma outra abordagem baseada na transformada wavelet (morfologia multi-escala) que abre um novo leque de possibilidades que trabalha com os conceitos da morfologia matemática (erosão, dilatação, abertura, fechamento) (Bouchereau, 1997; Valet et al., 2001; Wang et al., 2008; Gauthier, 2008; Li et al., 2012; Junqing et al., 2014; Luo e Xu, 2016; Li et al., 2016).
- Utilizar a morfologia matemática para resolver problemas de descontinuidade de refletores em sub-superfície, através de técnicas que combinam seus operadores (Goldner et al., 2015).

A aplicação destas metodologias poderão ajudar o interprete a definir melhor os horizontes de interesse onde há pouca informação à priori e utilizar outros parâmetros para obter melhores resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baets, B. d., 1998, *in* A Fuzzy Morphology: a Logical Approach: Springer US, 53–67.
- Baets, d. B., E. Kerre e M. Gupta, 1995, The fundamentals of fuzzy mathematical morphology part 1: basic concepts: International Journal of General Systems, **23**, 155–171.
- Banon, G. J. F. e J. Barrera, 1994, Bases da morfologia matemática para análise de imagens binárias.
- Barrera, J., 1987, Uma abordagem unificada para os problemas de processamento digital de imagens: a morfologia matemática: Dissertação de mestrado, INPE.
- Berkhout, A. J., 1984, Seismic migration: imaging of acoustic energy by wave field extrapolation. a theoretical aspects, 2 ed.: Elsevier Science Publishing Co.
- Berkhout, A. J. e D. J. Verschuur, 1997, Estimation of multiple scattering by iterative inversion, Part I: Theoretical considerations: Society of Exploration Geophysicists, **62**, 1586–1595.
- Bloch, I., 2009, Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations: Fuzzy Sets and Systems, **160**, 1858–1867.
- Bloch, I. e H. Maître, 1994, Fuzzy mathematical morphology: Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, **10**, 55–84.
- Bouchereau, E. B., 1997, Analyse d’images par transformées en ondelettes. Application aux images sísmiques: Tese de doutorado, Université Joseph-Fourier - Grenoble I.
- Delgado, M. R. B. S., 2002, Projeto automático de sistemas nebulosos: Uma abordagem co-evolutiva: Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas.
- Deng, T. Q. e H. J. A. M. Heijmans, 2002, Grey-scale morphology based on fuzzy logic: Journal of Mathematical Imaging and Vision, **16**, 155–171.
- Facon, J., 1996, Morfologia matemática: Teoria e exemplos, 1 ed.: Editora Universitária Champagnat.
- Fullér, R., 1995, Neural fuzzy systems, 1 ed.: Abo Ackademi University, **2**.
- Gauthier, J., 2008, Analyse de signaux et d’images par bancs de filtres. applications aux géosciences.: Tese de doutorado, Université de Paris-Est Marne-la-Vallée.
- Goldner, E. L., C. N. Vasconcelos, P. M. Silva e M. Gattass, 2015, A shortest path algorithm for 2d seismic horizon tracking: ACM - The Association for Computing Machinery, Inc., **81**, 80–85.

- Gonzales, R. C. e R. E. Woods, 2001, Digital image processing, 2 ed.: Printice Hall.
- Hadwiger, H., 1950, Minkowskische addition und subtraktion beliebiger punktmengen und die theoreme von erhard schmidt: *Math*, **53**, 210–218.
- , 1957, Vorlesungen Über inhalt, oberfläche und isoperimetrie: Springer Berlin Heidelberg, **93**.
- Junqing, Y., W. Runqiu, L. Taoran, Z. Zhenglong, W. Jian, J. Yongyong, S. Lipeng e X. Pei, 2014, Seismic energy dispersion compensation by multi-scale morphology: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **11**, 376–384.
- Kerre, E. E. e M. Nachtgael, 2000, Fuzzy techniques in image processing, 1st ed.: Springer Berlin Heidelberg, **52**.
- Li, H., R. Wang, S. Cao, Y. Chen e W. Huang, 2016, A method for low-frequency noise suppression based on mathematical morphology in microseismic monitoring: *Geophysics*, **81**, V159–V167.
- Li, L., G. Ma e X. Du, 2012, New method of horizon recognition in seismic data: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **9**, 1066–1068.
- Lukasiewicz, J. e L. Borkowski, 1970a, Selected works: North-Holland, **11**.
- , 1970b, Selected works: North-Holland, **59**.
- Luo, D. e H. Xu, 2016, Multi-scale complete lattice morphological seismic image enhancement method: *Technical Journal of the Faculty of Engineering*, **39**, 248–252.
- Matheron, G., 1975, Random sets and integral geometry: John Wiley e Sons Inc. Probability e Mathematical Statistics.
- Minkowski, H., 1903, Volumen und oberfläche: *Mathematische Annalen*, **57**, 447–495.
- Nachtgael, M. e E. E. Kerre, 2001, Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies: *Fuzzy Sets and Systems*, **124**, 73–85.
- Oliveira, A. G., 2011, Uma análise de métodos de supressão de múltiplas de superfície livre aplicados a um dado real: Dissertação de mestrado, UFPA/IG/CPGF.
- Oliveira, A. G. e E. N. S. Gomes, 2013, Determination of an optimal processing flow for the suppression of free-surface multiples in real 2D marine data: *RBGF*, **31**, 137–149.
- Pomerol, J. C., C. Foulard, F. Castanié, H. Maître e J. B. Dubuisson, 2003, Le traitement des images: Hermes Science Publications.

- Riley, D. C. e J. F. Claerbout, 1976, 2-D multiple reflections: Society of Exploration Geophysicists, **41**, 592–620.
- Ruspini, E. H., P. P. Bonissone e W. Pedrycz, 1998, Handbook of fuzzy computation: Institute of Physics Publishing.
- Serra, J., 1982, Image analysis mathematical morphology, 1st ed.: Academic Press, **1**.
- , 1988, Image analysis mathematical morphology: Theoretical advances, 1st ed.: Academic Press, **2**.
- Shi, Y., M. Nachtegaele, D. Ruan e E. E. Kerre, 2009, Fuzzy adjunctions and fuzzy morphological operations based on implications: International Journal of Intelligent Systems, **24**, 1280–1296.
- Sinha, D. e E. R. Dougherty, 1992, Fuzzy mathematical morphology: Journal of Visual Communication and Image Representation, **3**, 286–302.
- Sternberg, S. R., 1981, Parallel architectures for image processing: Springer, 347–359.
- Stockwell, J., 2012, A course in geophysical image processing with seismic unix: Gpgn 461/561 lab: Center for Wave Phenomena.
- Tatham, R. H., 1989, *in* Tau-p filtering: Ed. Kluwer Academic Publishers and Stoffa, P. L., **8**, 35–70.
- Tatham, R. H., J. W. Keeney e I. Noponen, 1983, Application of the tau-p transform (slant-stack) in processing seismic reflection data: Australian Society of Exploration Geophysicists, **14**, 162–172.
- Valet, L., G. Mauris e P. Bolon, 2001, Seismic image segmentation by fuzzy fusion of attributes: IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, **50**, 1014–1018.
- Verschuur, D. J., 2006, Seismic multiple removal techniques: European Association of Geoscientists and Engineers.
- Verschuur, D. J. e A. J. Berkhout, 1992, Surface-related multiple elimination. practical aspects: Society of Exploration Geophysicists - Expanded Abstracts, 1100–1103.
- , 1997, Estimation of multiple scattering by iterative inversion. part I. practical aspects and examples: Society of Exploration Geophysicists, **62**, 1596–1611.
- Verschuur, D. J., A. J. Berkhout e C. P. A. Wapenaar, 1989, Wavelet estimation by pre-stack multiple elimination: Society of Exploration Geophysicists - Expanded Abstracts, 1129–1132.

- , 1992, Adaptive surface-related multiple elimination: *Society of Exploration Geophysicists*, **57**, 1166–1177.
- Wang, R., Q. Li e M. Zhang, 2008, Application of multi-scaled morphology in denoising seismic data: *Applied Geophysics*, **5**, 197–203.
- Yilmaz, O., 2001, *Seismic data analysis. processing, inversion, and interpretation of seismic data.*, 2 ed.: *Society of Exploration Geophysicists*, **1**.
- Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets: *Information and Control*, **8**, 338–353.
- , 1973, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **3**, 28–44.