



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Improving apparent conductivity and inversion of
magnetic dipoles data**

ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

Belém, Pará
2019

ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

**Improving apparent conductivity and inversion of
magnetic dipoles data**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de concentração:
Modelagem e inversão de dados geofísicos

Linha de pesquisa:
Geofísica Rasa

Orientador: Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Belém, Pará
2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

F814i França, Érico Tenório
Improving apparent conductivity and inversion of magnetic
dipoles data / Érico Tenório França. — 2019.
58 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação Geofísica,
Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém,
2019.

1. Condutividade aparente. 2. Derivada semi-analítica. 3.
Inversão. I. Título.

CDD 622.15

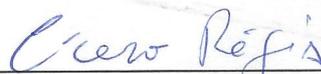
ÉRICO TENÓRIO FRANÇA

**Improving apparent conductivity and inversion of magnetic
dipoles data**

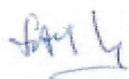
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade
Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em
Geofísica.

Data de aprovação: 30 de abril de 2019

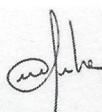
Banca Examinadora:



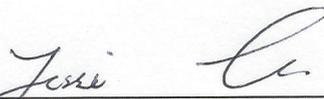
Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis (Orientador)
Universidade Federal do Pará



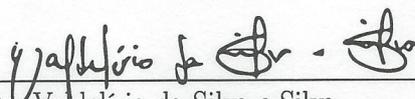
Prof. Dr. Fernando A. Monteiro Santos
Universidade de Lisboa



Prof. Dr. Luciano Soares da Cunha
Universidade de Brasília



Prof. Dr. Jesse Carvalho Costa
Universidade Federal do Pará



Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva
Universidade Federal do Pará

Para minha pequena Aurora.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Cícero Roberto Teixeira Régis pela orientação e paciência durante a realização deste trabalho.

Aos professores Cristiano Martins e Valdelírio Silva por toda ajuda na compreensão de conceitos geofísicos, tais como a inversão e a modelagem de métodos eletromagnéticos.

Aos meus colegas de trabalho do laboratório PROEM pelas trocas de ajuda. Aos amigos que me ajudaram de forma direta ou indireta. Em especial ao Ivaldevingles Rodrigues que me ajudou na construção do algoritmo de modelagem 2D.

Ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica pela infraestrutura e capacitação e a CAPES pelo suporte e investimento em forma de bolsa de estudo.

Por fim, aos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a condutividade aparente e a inversão de dados de dipolos magnéticos. Em ambos, utilizamos a mesma ferramenta matemática, a inversão, a fim de obter uma estimativa da distribuição da condutividade em subsuperfície. No primeiro capítulo apresentamos uma nova abordagem para obter a condutividade aparente de um terreno. A condutividade aparente convencional se utiliza de uma aproximação linear quando o campo é medido no regime de baixo número de indução. Essa aproximação trunca a série de Taylor que representa o campo Magnético para o semi-espaço. Nossa proposta é utilizar a resposta do campo Magnético completa para estimar a condutividade aparente do terreno. Tendo em vista que a relação entre campo e condutividade é não linear, nós tratamos o problema de estimar a condutividade a partir do campo Magnético como um problema inverso não linear. Utilizamos o método de Newton para resolver esse problema iterativamente. Assim, alcançamos uma melhor estimativa da condutividade aparente em poucas iterações, principalmente, quando o regime de baixo número de indução não é obedecido. No segundo capítulo apresentamos a inversão 1D e 2D de dados de dipolos magnéticos. Para esse caso, utilizamos o método de Gauss-Newton para resolver o problema inverso iterativamente. Nesse trabalho destacamos, em ordem de apresentação, as contribuições inéditas: *i*) derivada espacial semi-analítica para a modelagem 2D via método de Elementos Finitos; *ii*) derivada semi-analítica em relação a condutividade para a modelagem 1D; *iii*) cálculo da matriz sensibilidade para a modelagem 2D das componentes que dependem da derivada espacial.

Palavras-chave: Condutividade aparente. EM34. Derivada semi-analítica. Inversão.

ABSTRACT

In this paper we present a study on the apparent conductivity and inversion of magnetic dipole data. In both, we use the same mathematical tool, inversion, in order to obtain an estimate of the subsurface conductivity distribution. In the first chapter we present a new approach to obtaining the apparent conductivity of a ground. Conventional apparent conductivity uses a linear approximation when the field is measured in the low induction number regime. This approach truncates the Taylor series that represents the magnetic field for the semi-space. Our proposal is to use the full magnetic field response to estimate the apparent conductivity of the ground. Given that the relationship between field and conductivity is nonlinear, we treat the problem of estimating conductivity from the magnetic field as a nonlinear inverse problem. We use Newton's method to solve this problem iteratively. Thus, we obtain a better estimate of apparent conductivity in few iterations, especially when the low induction number regime is not obeyed. In the second chapter we present the 1D and 2D inversion of magnetic dipole data. For this case, we use the Gauss-Newton method to solve the inverse problem iteratively. In this paper we highlight, in order of presentation, the unpublished contributions: *i* semi-analytic spatial derivative for 2D Finite Element modeling; *ii*) semi-analytical derivative for conductivity for 1D modeling; *iii*) calculation of sensitivity matrix for 2D modeling of components that depend on the spatial derivative.

Keywords: Apparent conductivity. EM34. Semi-analytical derivative. Inversion.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Loop configurations: (a) Vertical coplanar (HMD source) and (b) Horizontal coplanar (VMD source).	2
1.2	Comparison of the imaginary parts of the full VMD (red) and HMD (blue) fields with the approximate LIN field (black).	5
1.3	(a) Comparison between the improved and the EM34 apparent conductivities for the synthetic VMD data for a homogeneous half-space. (b) Relative errors of both apparent conductivities.	8
1.4	(a) Comparison between the improved and the EM34 apparent conductivities for the synthetic HMD data for a homogeneous half-space. (b) Relative errors of both apparent conductivities.	9
1.5	2D geological model used in apparent conductivity pseudo-sections.	11
1.6	Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the synthetic data generated by the model in figure 1.5. Values in mS/m.	11
1.7	Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the synthetic data generated by the model in figure 1.5. Values in mS/m.	12
1.8	Location of the city of Salinópolis, and location of the lithological section C-H-I proposed by Freimann et al. (2014) in black line, the blue points being the wells C , H , I and O . The points in red are the observations taken in the northeast-southwest direction.	14
1.9	Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the real data. Values in mS/m.	15
1.10	Lithological section C-H-I presented by Freimann et al. (2014).	16
2.1	Localização do ponto $P(x_p, z_p)$ e os elementos que compartilham esse ponto. A numeração elementar obedece o sentido horário para todos os elementos.	23
2.2	Comparação entre a modelagem 1D e 2D. Os pontos são os campos calculados na modelagem 1D. A linhas vermelha e azul são as componentes H_z e H_y , respectivamente, calculadas na modelagem 2D. Foram modelados os três espaçamentos fonte-receptor do equipamento EM34.	25
2.3	Localização dos 6 elementos que fazem parte do parâmetro p_j (bloco azul), e do ponto de medida $P(x_p, z_p)$	28
2.4	Modelo geológico simulado.	30

2.5	Resultado da inversão 1D utilizando os vínculos de Suavidade Global (acima) e Variação Total (abaixo) em conjunto com igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.	31
2.6	Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Suavidade Global e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.	32
2.7	Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Variação Total e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.	33
2.8	Localização da cidade de Salinópolis, e localização da seção litológica C-H-I proposta por Freimann et al. (2014) em linha preta, sendo os pontos azuis os poços C , H , I e O . Os pontos em vermelho são as observações tomadas no sentido nordeste-sudoeste.	35
2.9	Seção litológica C-H-I sugerida por Freimann et al. (2014).	36
2.10	Resultado da inversão 1D utilizando os vínculos de Suavidade Global (acima) e Variação Total (abaixo) em conjunto com igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m.	37
2.11	Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Suavidade Global e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. Interpretação do topo da segunda camada da seção litológica em linha branca.	38
2.12	Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Variação Total e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. Interpretação do topo da segunda camada da seção litológica em linha branca.	39

SUMÁRIO

1	IMPROVING APPARENT CONDUCTIVITY ESTIMATION FROM SURFACE MAGNETIC DIPOLE DATA	1
1.1	ABSTRACT	1
1.2	INTRODUCTION	1
1.3	CONVENTIONAL APPARENT CONDUCTIVITY	2
1.4	IMPROVED APPARENT CONDUCTIVITY	6
1.5	APPLICATION TO SYNTHETIC DATA	10
1.6	APPLICATION TO REAL DATA	13
1.7	FINAL REMARKS	17
2	MELHORIAS NA INVERSÃO 1D E 2D DE DADOS DE DIPOLOS MAGNÉTICOS	18
2.1	RESUMO	18
2.2	INTRODUÇÃO	18
2.3	PROBLEMA DIRETO	20
2.3.1	Modelagem 1D	20
2.3.2	Modelagem 2D e derivada espacial semi-analítica	21
2.3.3	Teste de avaliação da modelagem	24
2.4	PROBLEMA INVERSO	24
2.4.1	Matriz sensibilidade para a modelagem 1D	26
2.4.2	Matriz sensibilidade para a modelagem 2D	28
2.5	APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS	29
2.6	APLICAÇÃO A DADOS REAIS	34
2.7	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICES	43
	A– DERIVADA ANALÍTICA DAS MATRIZES ELEMENTARES DO FEM	44

1 IMPROVING APPARENT CONDUCTIVITY ESTIMATION FROM SURFACE MAGNETIC DIPOLE DATA

1.1 ABSTRACT

This paper presents a method to determine apparent conductivities from electromagnetic dipole data for near-surface applications. In contrast with the traditional approach that uses a truncated series to approximate the fields, the new method calculates the apparent conductivity by solving a minimization problem using the complete homogeneous half-space analytical solutions for the magnetic field of the dipole sources. To illustrate the method, two examples are presented: an application to synthetic 2D data and another to real data acquired in Brazil. The method is able to generate improved conductivity estimations, particularly for conductive zones.

1.2 INTRODUCTION

Electromagnetic instruments operating in the Low Induction Number (LIN) regime are used in many geophysical applications, generating apparent conductivities from approximations of the half-space analytical solutions for the electromagnetic fields.

In the cases of magnetic dipoles placed on the surface of a conductive half-space the analytical solutions (Ward and Hohmann, 1987) normalized by the free-space field can be written as power series on the induction number θ , which is a function of the source-receiver offset, frequency, and conductivity of the medium. For low induction numbers the imaginary component of the normalized magnetic field can be approximated as a quadratic function of θ (McNeill, 1980; Méndez-Delgado et al., 1999), or a linear function of the conductivity. This linear approach yields a good approximation for the half-space conductivity in the LIN regime, but the approximation quickly degrades as θ grows, which happens in conductive environments.

Kruk et al. (2000) cites works where some procedures are presented to obtain the apparent conductivity of subsurface. Among them, it uses the method approached by Sternberg (1979) to obtain apparent conductivity for horizontal and vertical magnetic dipoles. This procedure is based on the projection data of the magnetic field curve of a homogeneous half-space to calculate apparent conductivity. However, for a unique apparent conductivity it is necessary both amplitude and phase information about the magnetic field.

This paper presents a method to improve the apparent conductivity determination by using the full expression of the magnetic field of a magnetic dipoles instead of the low order approximation. The method uses an implementation of Newton's method to minimize the

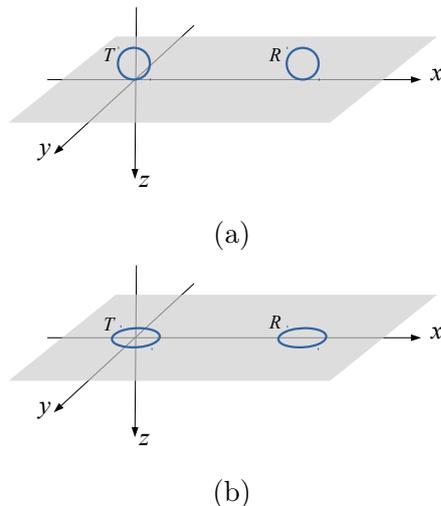


Figura 1.1: Loop configurations: (a) Vertical coplanar (HMD source) and (b) Horizontal coplanar (VMD source).

single variable function defined as the difference between the analytical half-space solution and the measured field component. The method uses the measured apparent conductivity as input to generate a corrected value. The new apparent conductivity reproduces the true half-space value for a wider range of induction numbers than that for which the linear approach yields reasonably good approximations. This solution is both very easy to implement and computationally inexpensive.

The difference between the proposed method and the one approached by Kruk et al. (2000) consists of the magnetic field information used. While that needs the real and imaginary parts of the magnetic field, our approach uses only the imaginary part. In contrast, we have apparent conductivity values still in the low induction range, however, with results superior to those obtained with the linear approach.

We have applied the method to synthetic data from 2D models, as well as to real data gathered in the city of Salinópolis, north of Brazil. The results show that the corrected data are generally closer to the true resistivities than the traditional apparent resistivities, especially in the most conductive zones.

1.3 CONVENTIONAL APPARENT CONDUCTIVITY

The estimation of apparent conductivity in the low induction number (LIN) regime is obtained from an approximation for the homogeneous half-space solution of the magnetic field from dipolar sources. The horizontal coplanar configuration uses the vertical component (H_z) generated by a vertical magnetic dipole (VMD), and the vertical coplanar configuration uses the horizontal (H_y) magnetic component generated by a horizontal magnetic dipole (HMD), as illustrated in figure 1.1.

The half-space analytical solutions for these fields (Ward and Hohmann, 1987) are

written in terms of the wave number $k = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$ in the quasi-static regime and the offset s between transmitter and receiver. The magnetic field components are

$$\frac{H_z}{H_0} = \frac{2}{k^2 s^2} (-9 + (9 + 9iks - 4k^2 s^2 - ik^3 s^3) e^{-iks}), \quad (1.1)$$

$$\frac{H_y}{H_0} = \frac{2}{k^2 s^2} (3 + k^2 s^2 - (3 + 3iks - k^2 s^2) e^{-iks}), \quad (1.2)$$

where H_0 is the magnetic field in the plane of the dipole in free space (*primary* field), which, for a source with a dipole moment m , is

$$H_0 = -\frac{m}{4\pi s^3}. \quad (1.3)$$

The solutions for the half-space fields (equations 1.1 and 1.2) can be written in terms of the induction number θ , defined as

$$\theta = s \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (1.4)$$

Using the relationship between the wave number and the induction number,

$$iks = (1 + i)\theta, \quad (1.5)$$

the equations for the field components (1.1 and 1.2) become

$$\frac{H_z}{H_0} = \frac{-2}{((i+1)\theta)^2} \left\{ -9 + [9 + 9(i+1)\theta + 4((i+1)\theta)^2 + ((i+1)\theta)^3] e^{-(i+1)\theta} \right\}, \quad (1.6)$$

$$\frac{H_y}{H_0} = \frac{-2}{((i+1)\theta)^2} \left\{ 3 - ((i+1)\theta)^2 - [3 + 3(i+1)\theta + ((i+1)\theta)^2] e^{-(i+1)\theta} \right\}. \quad (1.7)$$

Expanding the exponential function into its power series results in

$$\frac{H_z}{H_0} = \frac{-2}{((i+1)\theta)^2} \left[\frac{-((i+1)\theta)^2}{2} - \frac{((i+1)\theta)^4}{8} + \frac{5((i+1)\theta)^5}{24} + \dots \right], \quad (1.8)$$

$$\frac{H_y}{H_0} = \frac{-2}{((i+1)\theta)^2} \left[\frac{-((i+1)\theta)^2}{2} - \frac{((i+1)\theta)^4}{8} + \frac{((i+1)\theta)^5}{24} - \dots \right]. \quad (1.9)$$

The LIN approximation uses only the first two terms, which are the same in both series:

$$\frac{H_z}{H_0} \approx \frac{H_y}{H_0} \approx 1 + i \frac{\theta^2}{2}. \quad (1.10)$$

Then, using only the imaginary component, the apparent conductivity for both the

Tabela 1.1: EM34-3 arrays offset/frequency and exploration depths.

Intercoil spacing (m)	Exploration depth (m)		Frequency (Hz)
	Horizontal dipole	Vertical dipole	
10	7.5	15	6400
20	15	30	1600
40	30	60	400

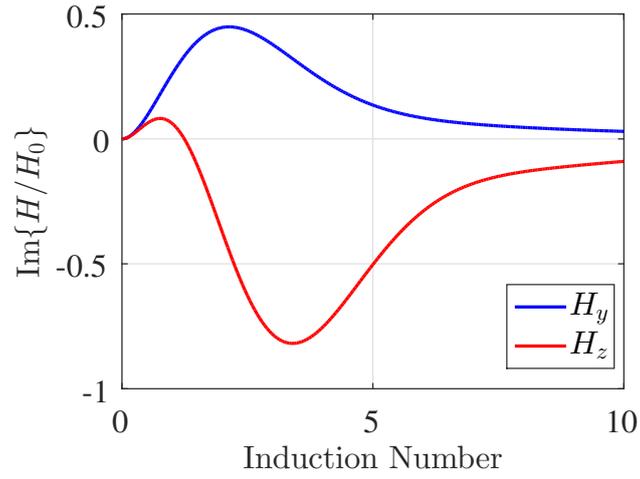
VMD and the HMD is given by

$$\sigma_a = \frac{4}{\omega\mu_0 s^2} \text{Im} \left\{ \frac{H}{H_0} \right\}. \quad (1.11)$$

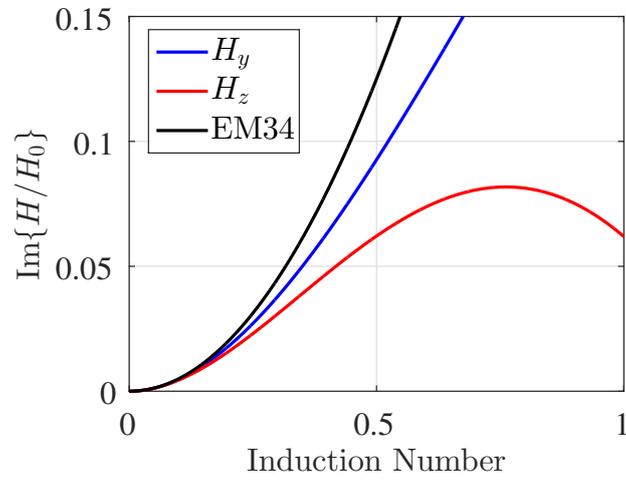
The EM34-3 equipment (Geonics) operates in the LIN regime, using three fixed-array settings (offset/frequency) for both the VMD and the HMD (Table 1.1). The values of frequencies and offsets are chosen so that for a homogeneous half-space all configurations work with the same induction number for the same conductivity.

Figure 1.2 shows the imaginary parts of the half-space fields from both the VMD (equation 1.6) and the HMD (equation 1.7) along with the approximate field (equation 1.10), as functions of the induction number. Note that the linear approximation is always a lesser value than the smallest of the two possible induction numbers for any of the two components. Therefore, the apparent conductivity is always less than the true half-space value.

Naturally, the approximation worsens as the induction number increases. The relative difference between the approximate and the total half-space fields is already approximately 6% for the HMD and 12% for the VMD for the same $\theta = 0.1$, which is associated with a conductivity of 4 mS/m or a 250 ohm-m resistivity.



(a) Dipole fields.



(b) Zoom in to compare with the LIN approximation.

Figure 1.2: Comparison of the imaginary parts of the full VMD (red) and HMD (blue) fields with the approximate LIN field (black).

1.4 IMPROVED APPARENT CONDUCTIVITY

The inverse problem of estimating the apparent conductivity from the imaginary component of the field can be formulated as a minimization problem, for a non linear function of a single variable. In this case the complete expressions for the homogeneous half-space fields (equations 1.6 and 1.7) can be used, and the result is a better approximation for the medium conductivity than those generated by using only one term of the infinite series representing the fields.

Among the many possible approaches to solve this minimization problem, we have chosen to implement Newton's method, because it is conceptually simple, easy to program, and has high convergence rates for the field functions, reaching a solution with the desired precision within few iterations.

Representing the imaginary parts of the normalized magnetic field components by $h_z(\sigma)$ and $h_y(\sigma)$, as functions of the conductivity of the half-space,

$$h_z(\sigma) = \text{Im} \left\{ \frac{H_z}{H_0} \right\}, \quad h_y(\sigma) = \text{Im} \left\{ \frac{H_y}{H_0} \right\}, \quad (1.12)$$

define the function Φ as the squared difference between h_z or h_y and the respective measured (observed) field h^o

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2}(h - h^o)^2. \quad (1.13)$$

Given a value σ_k , the power series expansion of Φ at $(\sigma_k + \Delta\sigma)$ is

$$\Phi(\sigma_k + \Delta\sigma) = \Phi(\sigma_k) + \Phi'(\sigma_k)\Delta\sigma + \Phi''(\sigma_k)\frac{(\Delta\sigma)^2}{2!} + \Phi'''(\sigma_k)\frac{(\Delta\sigma)^3}{3!} + \dots \quad (1.14)$$

For small steps $\Delta\sigma$, the function can be approximated by truncating the series at the quadratic term.

$$\Phi(\sigma_k + \Delta\sigma) \approx \Phi(\sigma_k) + \Phi'(\sigma_k)\Delta\sigma + \Phi''(\sigma_k)\frac{(\Delta\sigma)^2}{2}. \quad (1.15)$$

Then, by taking the derivative of Φ with respect to $\Delta\sigma$, we can determine the step size $\Delta\sigma^*$ needed to reach the minimum, where the derivative is zero:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\sigma} = \Phi'(\sigma_k) + \Phi''(\sigma_k)\Delta\sigma, \quad (1.16)$$

$$\Delta\sigma^* = -\frac{\Phi'(\sigma_k)}{\Phi''(\sigma_k)}. \quad (1.17)$$

For a quadratic function of σ , this step would reach the minimum regardless of the

value of σ_k . Since Φ is not a quadratic function, this step size is used iteratively:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{\Phi'(\sigma_k)}{\Phi''(\sigma_k)}. \quad (1.18)$$

Each iteration takes a step in the direction of the minimum of the quadratic approximation of the function Φ given by the truncated series (equation 1.15). As the process progresses, the quadratic approximation becomes closer to the function Φ as it approaches its minimum.

The derivatives are

$$\Phi'(\sigma) = \frac{\partial\Phi(\sigma)}{\partial\sigma} = (h - h^o) \frac{\partial h}{\partial\sigma}, \quad (1.19)$$

$$\Phi''(\sigma) = \frac{\partial^2\Phi(\sigma)}{\partial\sigma^2} = \left(\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right)^2 + (h - h^o) \frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}. \quad (1.20)$$

The derivatives of h_z and h_y are calculated analytically from the half-space solutions (equations 1.6 and 1.7). To shorten the notation,

$$t = (1 + i)\theta. \quad (1.21)$$

Then,

$$\frac{\partial h_y}{\partial\sigma} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{\sigma t^2} [6 - (6 + 6t + 3t^2 + t^3) e^{-t}] \right\}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial\sigma^2} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\sigma^2 t^2} [-24 + (24 + 24t + 12t^2 + 4t^3 + t^4) e^{-t}] \right\}, \quad (1.23)$$

and

$$\frac{\partial h_z}{\partial\sigma} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{\sigma t^2} [-18 + (18 + 18t + 9t^2 + 3t^3 + t^4) e^{-t}] \right\}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial\sigma^2} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\sigma^2 t^2} [72 - (72 + 72t + 36t^2 + 12t^3 + 3t^4 + t^5) e^{-t}] \right\}. \quad (1.25)$$

This inverse problem is ill-posed and there are two induction numbers associated with a given field measurement. The apparent conductivity given by the EM34 equipment is a suitable first guess to start the process. Using it ensures that the minimum of Φ will be at the lowest half-space conductivity compatible with the measured field, still making this a Low Induction Number method.

The iterations stop when there is no significant variation in the conductivity. The result is the true value of the homogeneous half-space conductivity with the desired precision used as the stopping criterium.

Figures 1.3 and 1.4 show the comparison between the apparent conductivity of the EM34 equipment and the improved one for a homogeneous half-space. For both dipole

sources, the true half-space value is achieved for the low range of induction numbers up to the value where the curves in Figure 1.2 reach their maxima.

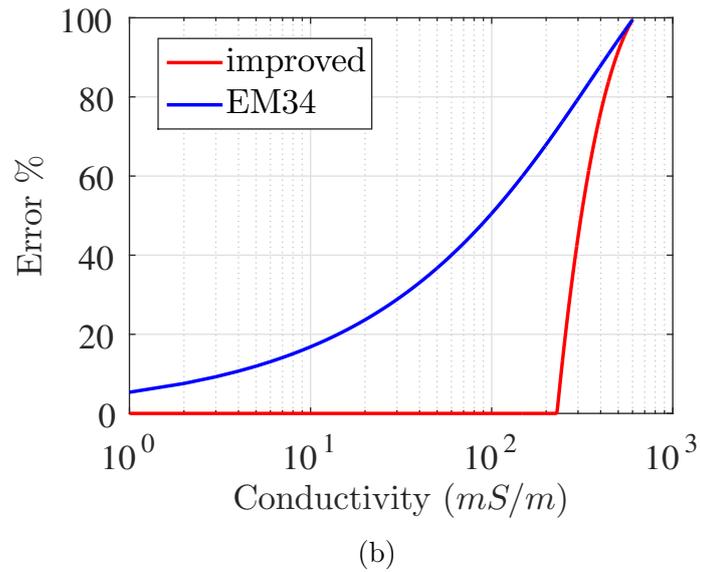
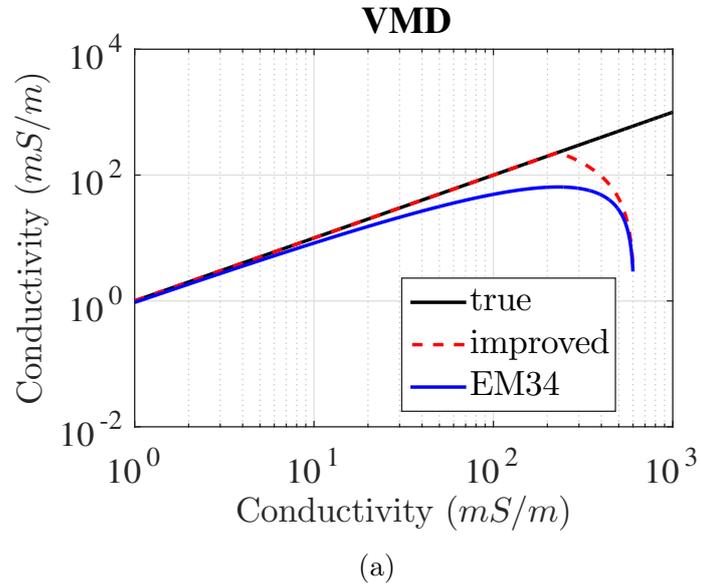


Figure 1.3: (a) Comparison between the improved and the EM34 apparent conductivities for the synthetic VMD data for a homogeneous half-space. (b) Relative errors of both apparent conductivities.

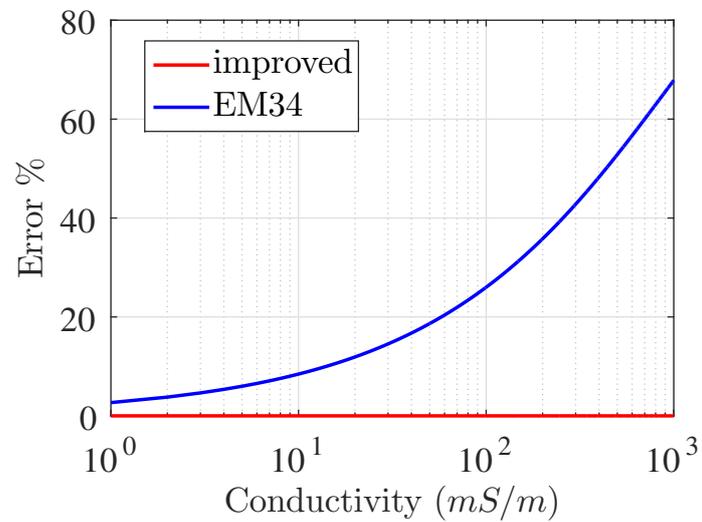
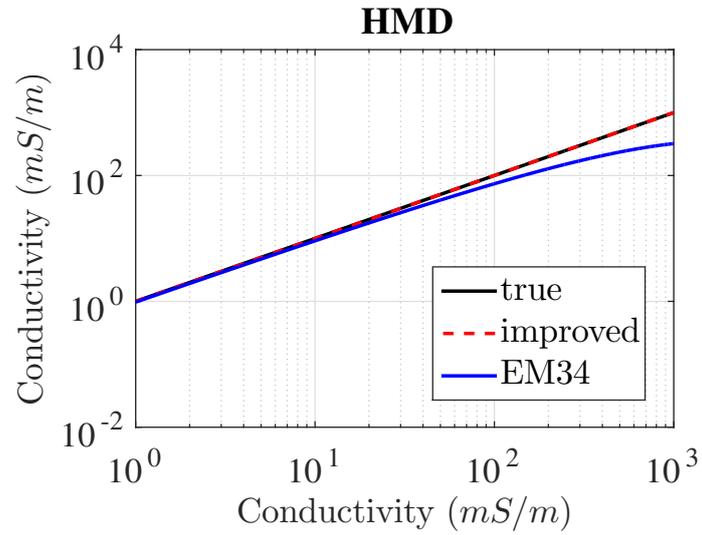


Figure 1.4: (a) Comparison between the improved and the EM34 apparent conductivities for the synthetic HMD data for a homogeneous half-space. (b) Relative errors of both apparent conductivities.

1.5 APPLICATION TO SYNTHETIC DATA

The synthetic H_z and H_y data were generated with a 2.5D nodal finite element code, using a non-structured mesh.

The model simulates a conductive geological environment with a 5 m thick top layer over an infinite basement and a trough-shaped feature with the same conductivity as the upper layer (figure 1.5). Data is simulated in two versions of this model: one with the top layer more conductive than the basement (100 mS/m and 20 mS/m), and the other with the inverted contrast making the top layer more resistive than the basement (20 mS/m and 100 mS/m). The survey lines are 200 m long, with 5 m spacing between measurements.

The results are presented as apparent conductivity sections, using the “exploration depths” specified in the EM34 technical notes (table 1.1).

The 5 m thickness of the top layer is less than the lowest EM34 exploration depth specified, which is 7.5 m for the horizontal dipole 10 m offset configuration. This top layer is enough to perturb the field of the otherwise homogeneous half-space and hinder the LIN approximation. The 2D structure at the base of the layer further distorts the fields at the surface in the central regions of the survey line.

Figure 1.6 shows the apparent conductivity sections for the model with the 100 mS/m top layer and 20 mS/m resistive basement. These values were chosen to be far from the high resistivities for which the LIN approximation yields the best results. The influence of the top layer is felt over all frequencies in both vertical and horizontal dipole configurations.

The apparent conductivities in the corrected sections are consistently closer to the true values than those in the unchanged EM34 sections, including the signature of the top thin layer. The 2D structure further distorts the field in the central positions in the survey, especially the horizontal dipole data.

Figure 1.7 shows the results for the model with the 20 mS/m top layer and 100 mS/m basement. In this case, the higher resistivity of the top thin layer makes it exert less influence on the half-space response of the basement. The corrected values reflect the true conductivity of the basement in both the vertical and the horizontal dipole configurations.

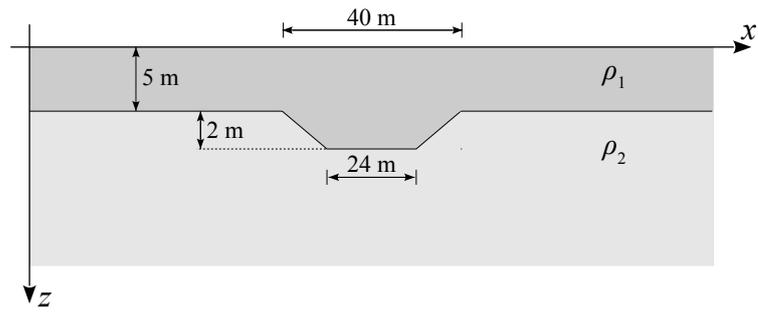


Figura 1.5: 2D geological model used in apparent conductivity pseudo-sections.

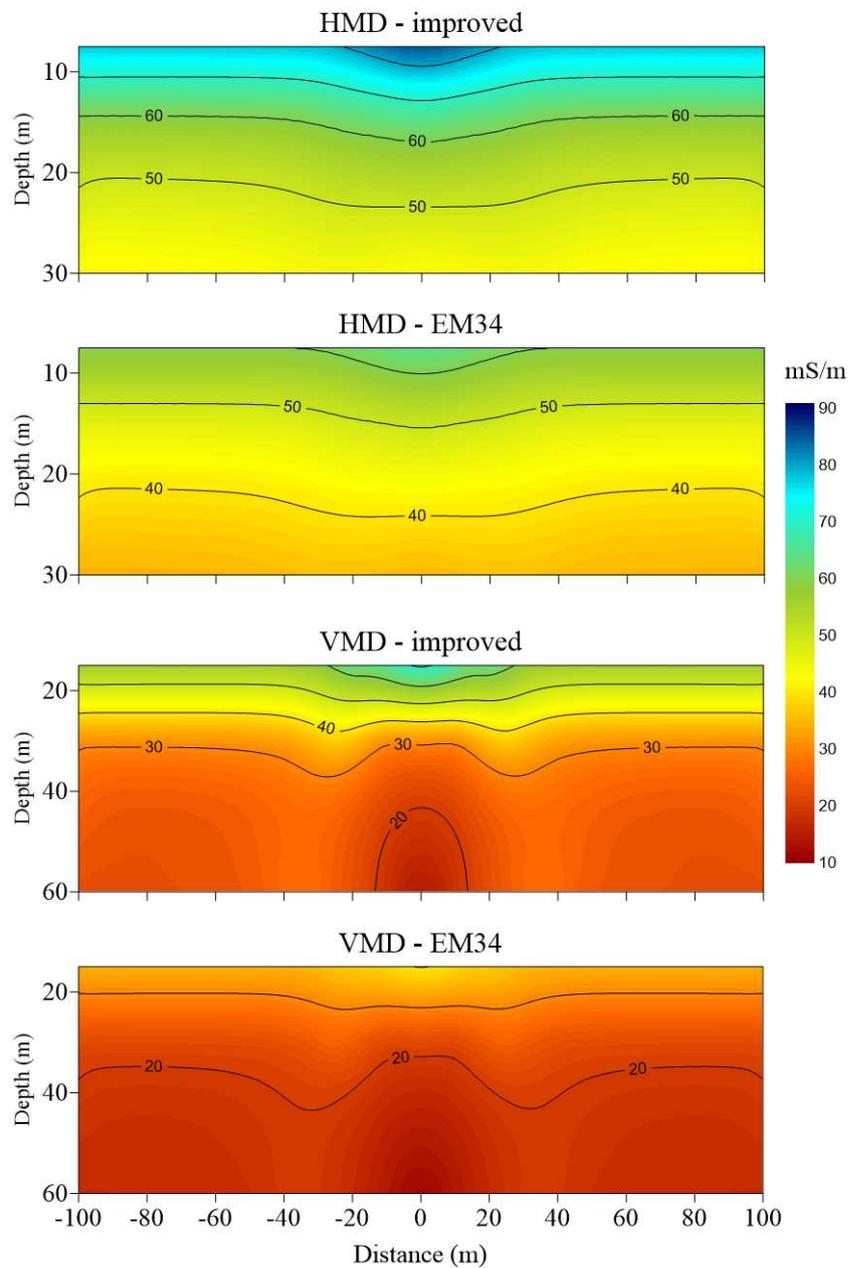


Figura 1.6: Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the synthetic data generated by the model in figure 1.5. Values in mS/m.

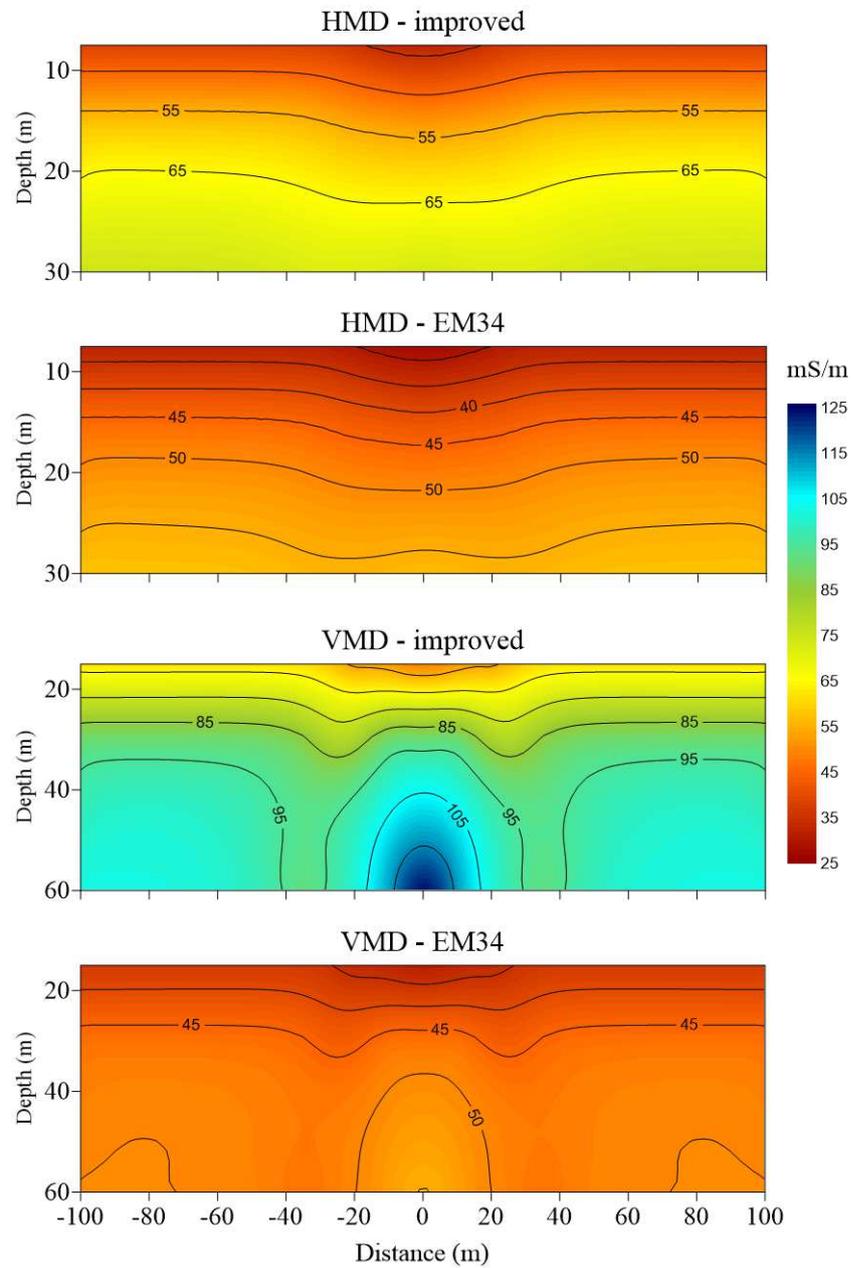


Figure 1.7: Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the synthetic data generated by the model in figure 1.5. Values in mS/m.

1.6 APPLICATION TO REAL DATA

The following data were acquired in the city of Salinópolis, state of Pará, Brazil. The local geology consists of a miocene carbonate sequence (Pirabas Formation), which is covered by more resistive continental tertiary and quaternary terrigenous sediments (Barreiras e Post-Barreiras) (Rossetti, 2001). The Pirabas Formation is the main source of local water supply.

The measurements were taken in the vicinity of a ground water well for which there are logging data available. The EM34 data set is composed of 20 measurements acquired every 10 m with the two coplanar configurations, northeast-southwest direction as shown in the Figure 1.8.

Figure 1.9 shows the apparent conductivity sections built with the original EM34 data and the corrected data. There are slight differences between the two HMD sections, which are mainly under the influence of the more resistive shallow zone. On the other hand, the most remarkable result is found in the improved VMD data section, which reveals a more conductive deep region (≈ 90 mS/m), whereas the corresponding EM34 section reaches a maximum conductivity of approximately 45 mS/m.

Figure 1.10 shows the lithological section presented by Freimann et al. (2014, in portuguese). Their interpretation indicates that there are two deep aquifers located around the depths of 70 e 105 m below sea level. These conductive layers may be influencing the data, and remaining undetected in the conventional sections, but it is possible to infer their presence in the improved sections.



Figura 1.8: Location of the city of Salinópolis, and location of the lithological section **C-H-I** proposed by Freimann et al. (2014) in black line, the blue points being the wells **C**, **H**, **I** and **O**. The points in red are the observations taken in the northeast-southwest direction.

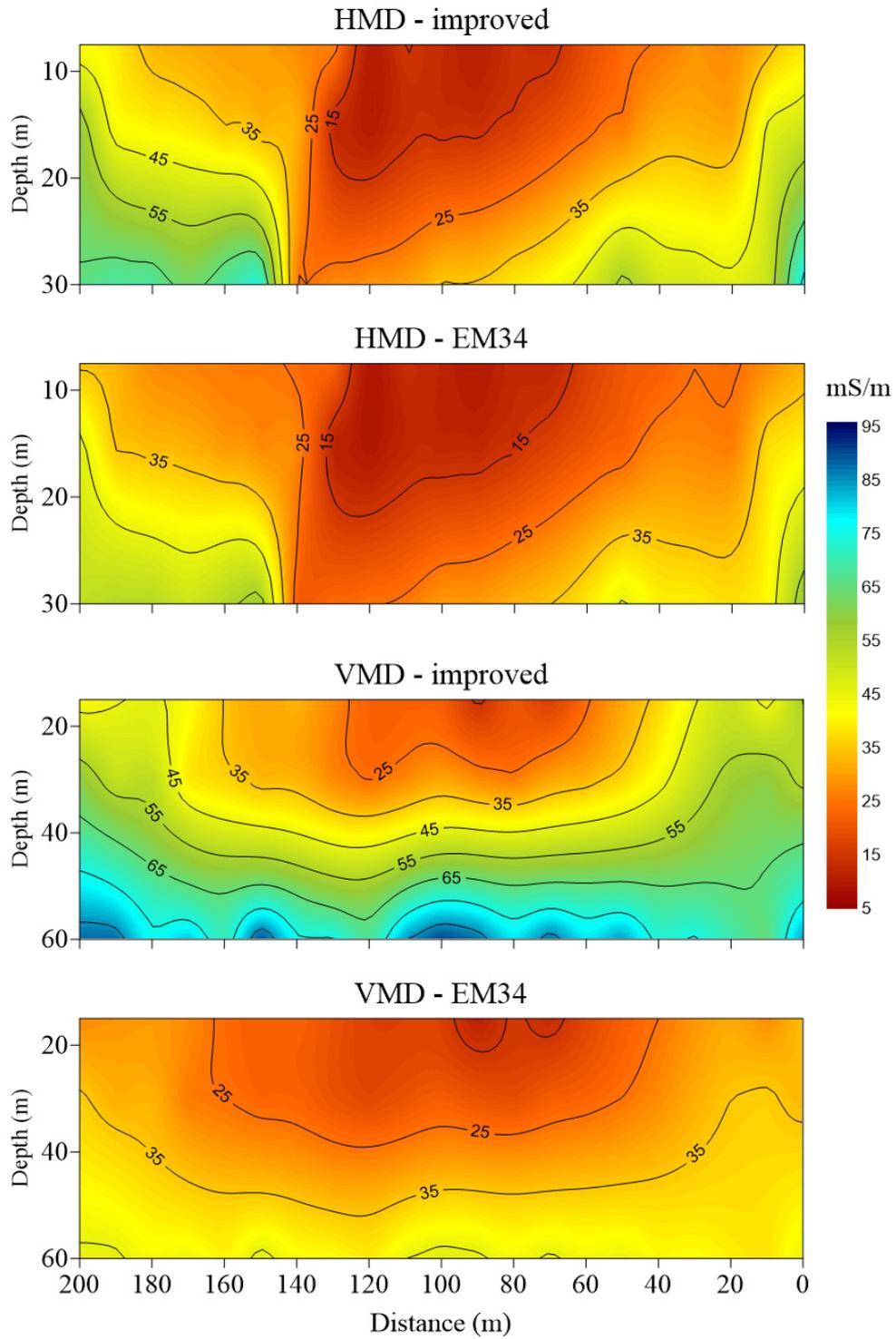


Figure 1.9: Comparison between the improved and the traditional LIN apparent conductivity for the real data. Values in mS/m.

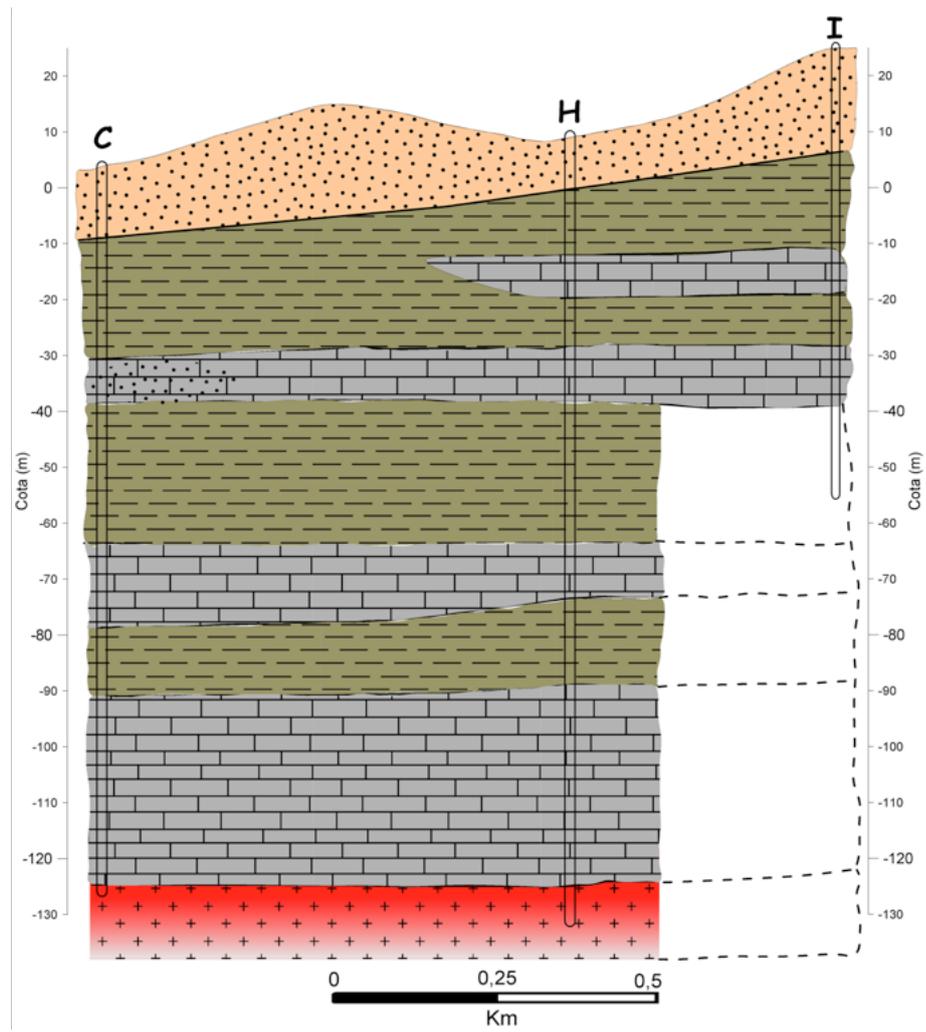


Figura 1.10: Lithological section C-H-I presented by Freimann et al. (2014).

1.7 FINAL REMARKS

We have presented a method to determine apparent conductivities from electromagnetic dipole data that uses an optimization code to estimate conductivity from the complete homogeneous half-space solutions for the magnetic field, instead of using the traditional truncated power series. The method takes the usual measurements as input and generates corrected apparent conductivities with very little computational cost.

The proposed method generates apparent conductivities that converge to the traditional EM34 data in the most resistive environments, but that differ remarkably from the conventional data in conductive zones for which the conductivities estimated by the low order approximation tend to be lower than the true values in the geological environments.

2 MELHORIAS NA INVERSÃO 1D E 2D DE DADOS DE DIPOLOS MAGNÉTICOS

2.1 RESUMO

Neste artigo apresentamos uma abordagem para inversão 1D e 2D de dados do equipamento EM34-3 (Geonics). Realizamos a inversão conjunta dos dois modos de operação (dipolo magnético vertical e horizontal), e definimos o problema inverso como não linear. Assim, utilizamos o método de Gauss-Newton para resolver esse problema iterativamente. Para obtermos uma solução única e estável adicionamos os regularizadores Suavidade Global e Variação Total. A inversão 1D é não linear por que utilizamos a solução completa do fenômeno de indução para a modelagem. Nessa inversão, aplicamos a vinculação lateral de parâmetros para diferentes pontos de observação, dessa forma obtemos uma imagem bidimensional. Essa vinculação pode usar a norma L_2 que define o vínculo de Suavidade Global, ou a norma L_1 que define o vínculo de Variação Total. Além disso, propomos uma derivada semi-analítica para a construção da matriz sensibilidade. Na inversão 2D realizamos a modelagem via método de Elementos Finitos, no qual obtemos as componentes paralelas ao *strike* dos campos magnético e elétrico. Propomos uma derivada espacial semi-analítica a fim de obter as outras componentes dos campos. A metodologia foi validada em um modelo sintético baseado no possível ambiente geológico esperado no dado real. Aplicamos as duas inversões em dados coletados nas proximidades de um posto de captação de água, o resultados foram correlatos com as informações de perfis litológicos e perfilagens geofísicas realizadas no local.

2.2 INTRODUÇÃO

O objetivo de uma sondagem eletromagnética é obter alguma informação, qualitativa ou quantitativa, acerca da distribuição de condutividade da subsuperfície a partir de um conjunto de medidas tomadas na superfície da Terra. As aplicações vão desde investigações rasas, como estudos ambientais e hidrogeológicos, até investigações mais profundas, como o estudo da crosta terrestre. Destacamos um método que consiste em duas bobinas na superfície: a primeira é o transmissor, que produz um campo magnético alternado que induz correntes elétricas na subsuperfície; a segunda é o receptor, localizada a uma curta distância que detecta o campo magnético produzido pelas correntes induzidas. O equipamento EM34-3 (Geonics) utiliza esse método com a configuração coplanar das bobinas para o regime de baixo número de indução (*Low Induction Number* – LIN). O número de indução depende da frequência de excitação da fonte, do espaçamento fonte-receptor e da condutividade do terreno. Assim, a relação entre a componente imaginária do campo

magnético e a condutividade de um semi-espaço homogêneo é linearmente proporcional para o regime LIN (McNeill, 1980). Portanto, obtém-se assim a medida de condutividade aparente de um terreno.

A configuração coplanar horizontal tem como fonte um dipolo magnético vertical (*Vertical Magnetic Dipole* – VMD) na superfície, enquanto a configuração coplanar vertical usa um dipolo magnético horizontal (*Horizontal Magnetic Dipole* – HMD). Essas configurações utilizam um espaçamento fonte-receptor (*offset*) fixo para cada frequência. A aproximação usada para gerar condutividade aparente é formulada para baixos números de indução, o que restringe o método a ambientes geológicos bastantes resistivos.

Uma abordagem para conseguir uma melhor estimativa das estruturas geo-elétricas é realizar a inversão desses dados. Alguns trabalhos abordam a inversão 1D dos dados de EM34, dentre eles Santos (2004) e Triantafylis and Santos (2009) utilizam a modelagem e a sensibilidade baseados na função resposta acumulativa; Santos et al. (2010), Triantafylis et al. (2012) e Triantafylis et al. (2013) utilizam a solução completa do fenômeno de indução para calcular a modelagem e a sensibilidade; Gómez-Treviño et al. (2002) apresentam uma nova abordagem para a modelagem e inversão 1D assumindo desde o início uma forma assintótica para as equações de Maxwell mostrada em Méndez-Delgado et al. (1999). Outros trabalhos abordam a inversão 2D de dipolos magnéticos, como em Pérez-Flores et al. (2001) que utilizam a formulação de Méndez-Delgado et al. (1999) e integram outros métodos geofísicos a inversão; em Guillemoteau et al. (2015) realizam inversão 1D e 2D utilizando a metodologia *approximate inverse mapping* proposta por Oldenburg and Ellis (1991). Pérez-Flores et al. (2012) estendem os conceitos trabalhados nas inversões 1D e 2D de Gómez-Treviño et al. (2002) e Pérez-Flores et al. (2001), respectivamente, para realizar inversão 3D de dados no regime LIN.

Nós propomos neste trabalho a inversão 1D e 2D de dados de dipolos magnéticos, especificamente de dados de EM34. O algoritmo de inversão é baseado no método de Gauss-Newton, no qual se obtém a estimativa do vetor de parâmetros iterativamente. Além disso, utilizamos a estratégia de Marquardt (Marquardt (1963)) para torna a matriz a ser invertida sempre diagonal dominante durante as iterações. Nós realizamos a inversão conjunta das duas fontes VMD e HMD, para ter uma melhor estimativa da distribuição de condutividade em subsuperfície. Gómez-Treviño et al. (2002) apresentam um estudo que comprova a vantagem de realizar a inversão conjunta dessas fontes. Para colocar essas duas fontes na mesma inversão, adaptamos a utilização dos fatores de normalização apresentados por Barbosa et al. (1999). Aplicamos os regularizadores de Suavidade Global (SG) e Variação Total (VT). Em seguida, testamos a nossa metodologia em um modelo sintético baseado no possível ambiente geológico esperado no dado real.

As medidas do dado real foram realizadas na cidade de Salinópolis, nordeste do Pará, Brasil. O levantamento foi realizado em uma rua ao lado do posto de captação de água Açai da COSANPA (Companhia de Saneamento do Pará), onde tivemos acesso a dados de

perfilagem e litologia de poços. Em Freimann et al. (2014) apresentam seções litológicas interpretadas a partir de perfilagens geofísicas de poços dessa região. Nesse trabalho, é proposta a existência de até quatro aquíferos potencialmente viáveis para o abastecimento local. De posse dessas informações, nós direcionamos os nossos esforços a fim de localizar esses reservatórios de água.

A nossa proposta de inversão 1D utiliza a vinculação *Laterally Constrained Inversion* (LCI) apresentada por Santos et al. (2010), que relaciona lateralmente inversões 1D através do regularizador de Suavidade Global. Nós utilizamos a solução completa do fenômeno de indução para a modelagem, assim como em Santos et al. (2010), no entanto, realizamos uma derivada semi-analítica para obter a sensibilidade, como é mostrado em Vedanti et al. (2005) para o método eletrorresistivo.

Na inversão 2D utilizamos a metodologia proposta por Grayver et al. (2013) para o cálculo da matriz sensibilidade, na qual o sistema de equações do método de diferenças finitas é derivado em relação aos parâmetros. Nós aplicamos essa derivada ao sistema de equações do método de Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM). De maneira similar, nós propomos uma derivada espacial semi-analítica, a fim de obter as componentes dos campos Elétricos e Magnéticos que não saem da solução do FEM. Utilizamos a estimativa da inversão 1D como aproximação inicial, e observamos uma diminuição no número de iterações se comparado quando a aproximação inicial é um semi-espaço homogêneo. Por fim, apresentamos os resultados para os dois regularizadores SG e VT e comparamos com os resultados da inversão 1D.

2.3 PROBLEMA DIRETO

2.3.1 Modelagem 1D

A modelagem direta é baseada nos trabalhos de Ward and Hohmann (1987) para o cálculo das componentes H_z e H_y dos dipolos magnéticos para as configurações coplanar horizontal (DMV) e vertical (DMH), respectivamente, sobre uma terra estratificada. Tomando os pontos de medida na superfície, temos,

$$\frac{H_z}{H_0} = r^3 \int (e^{-u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z-h_0)}) k_r^2 J_0(k_r r) dk_r , \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_y}{H_0} = & (r^2 - 2y^2) \int (e^{-u_0(z-h_0)} - R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z-h_0)}) k_r J_1(k_r r) dk_r \\ & + y^2 r \int (e^{-u_0(z-h_0)} - R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z-h_0)}) k_r^2 J_0(k_r r) dk_r , \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $H_0 = -m/(4\pi r^3)$ é o campo magnético no plano do dipolo no vácuo, sendo r a separação horizontal entre fonte e receptor, m o momento de dipolo (VMD ou HMD), z e h_0 as coordenadas verticais do ponto de medida e da fonte, respectivamente. Essas equações foram simplificadas tomando a condutividade do ar tendendo a zero, de modo

que a constante $u_0 \approx k_r$ e o modo de propagação TM para a fonte DMH é desprezado. Além disto consideraremos que fonte e receptor estão na mesma altura em relação à superfície ($z = h_0 \leq 0$). O coeficiente de reflexão $R_{TE}^{(0)}$ para o modo TE de propagação, é dado por:

$$R_{TE}^{(0)} = \frac{Y_0 - Y_1^*}{Y_0 + Y_1^*}, \quad (2.3)$$

em que $Y_0 = k_r/\zeta$ a admitancia do ar, $\zeta = i\omega\mu_0$ é a impeditividade, Y_1^* admitancia aparente da primeira camada obtida recursivamente,

$$Y_j^* = \frac{Y_{j+1}^* + Y_j \tanh(u_j h_j)}{1 + (Y_{j+1}^*/Y_j) \tanh(u_j h_j)}, \quad j = 1, n-1, \quad (2.4)$$

$$Y_n^* = Y_n, \quad (2.5)$$

sendo $u_j = \sqrt{k_r^2 - \zeta\sigma_j}$, onde σ_j a condutividade e h_j a espessura da j -ésima camada. As integrais em 2.1 e 2.2 são avaliadas usando a técnica de filtragem desenvolvida por Anderson (1979).

2.3.2 Modelagem 2D e derivada espacial semi-analítica

Definimos os campos totais \mathbf{E} e \mathbf{H} como a soma de campos primários e secundários (Hohmann, 1987). Adotando a variação temporal $e^{i\omega t}$ e a aproximação quase-estática, Li and Key (2007) mostram que os campos eletromagnéticos podem ser expressos em termos dos campos primários (\mathbf{E}^p e \mathbf{H}^p) induzidos por um dipolo (VMD ou HMD) em um meio estratificado com condutividade σ_p e campos secundários (\mathbf{E}^s e \mathbf{H}^s) causados por heterogeneidades com condutividade $\sigma = \Delta\sigma + \sigma_p$, temos,

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \sigma \mathbf{E}^s = \Delta\sigma \mathbf{E}^p, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -\zeta \mathbf{H}^s, \quad (2.7)$$

Para resolver as equações 2.6 e 2.7 definimos que a distribuição de condutividade varia somente no plano (x, z) , no entanto essas são equações diferenciais 3D. Aplicamos a transformada de Fourier em y assim tornamos essas equações 2D. Li and Key (2007) e Silva (2012) mostram que as equações 2.6 e 2.7 podem ser reduzidas a duas equações

diferenciais,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{u^2} \nabla \widehat{E}_y^s \right) - \sigma \widehat{E}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) = \quad (2.8)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y \Delta \sigma}{u^2} \widehat{E}_x^p \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y \Delta \sigma}{u^2} \widehat{E}_z^p \right) + \Delta \sigma \widehat{E}_y^p ,$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{u^2} \nabla \widehat{H}_y^s \right) - \zeta \widehat{H}_y^s - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) = \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta \Delta \sigma}{u^2} \widehat{E}_z^p \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\zeta \Delta \sigma}{u^2} \widehat{E}_x^p \right)$$

onde k_y é a variável espectral e $u^2 = k_y^2 - \zeta \sigma$. Seguimos o trabalho de Silva (2012) e resolvemos essas equações via método de Elementos Finitos (FEM), para isso discretizamos o domínio Ω em elementos triangulares, e obtemos a solução através do sistema de equações lineares,

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} , \quad (2.10)$$

de tamanho $2N$ (N número de nós), no qual \mathbf{u} é o vetor solução contendo os campos \widehat{E}_y^s e \widehat{H}_y^s para cada nó, \mathbf{f} o vetor fonte que contém o campo primário da fonte (VMD ou HMD) e a matriz \mathbf{K} é complexa, esparsa e simétrica. Realizamos a transformada de Fourier inversa e obtemos os campos no domínio espacial E_y^s e H_y^s .

No caso do VMD a componente H_z , medida fora das heterogeneidades, é resultante de derivadas espaciais,

$$\widehat{H}_z^s = \frac{-\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} . \quad (2.11)$$

Para evitar os erros da derivada numérica desenvolvemos uma derivada espacial semi-analítica. Se derivarmos o sistema 2.10 em relação a coordenada x_p do ponto de medida $P(x_p, z_p)$, temos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_p} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_p} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_p} \mathbf{u} \right) , \quad (2.12)$$

multiplicando \mathbf{Q}^T um vetor de zeros exceto um elemento igual a 1, que seleciona o elemento $\partial \widehat{E}_y^s(x_p, z_p) / \partial x_p$ no vetor $\partial \mathbf{u} / \partial x_p$, temos,

$$\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_p} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_p} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_p} \mathbf{u} \right) , \quad (2.13)$$

transpondo os dois lados e sabendo que \mathbf{K} é simétrica, nós temos a derivada $\partial \widehat{E}_y^s(x_p, z_p) / \partial x_p$ no ponto $P(x_p, z_p)$ dada por,

$$\left[\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_p} \right]^T = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_p} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_p} \mathbf{u} \right)^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} . \quad (2.14)$$

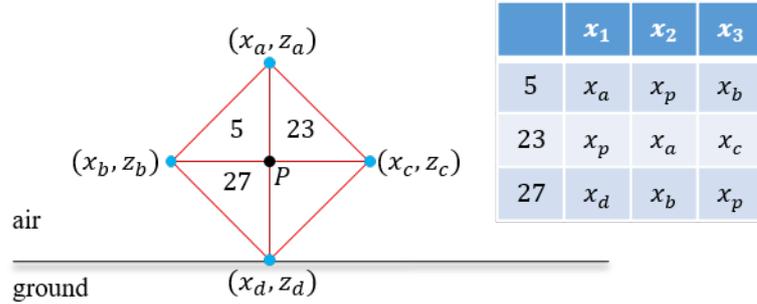


Figura 2.1: Localização do ponto $P(x_p, z_p)$ e os elementos que compartilham esse ponto. A numeração elemental obedece o sentido horário para todos os elementos.

onde a operação $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$ equivale a obter o vetor solução \mathbf{v} do sistema,

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{Q}. \quad (2.15)$$

No sistema 2.14 podemos partir da premissa que a derivada em relação a x_p para todos os outros pontos é igual a zero. Logo, somente os elementos que contém esse ponto ou nó terão valor de derivada diferente de zero. A Figura 2.1 mostra um exemplo em que quatro elementos dividem o mesmo nó em que a derivada espacial é avaliada. Para o caso particular em que esse ponto está fora das heterogeneidades ($\Delta\sigma = 0$), a derivada $\partial\mathbf{f}/\partial x$ é zero.

A matriz \mathbf{K} é construída a partir de matrizes elementares \mathbf{K}_e que dependem das posições x_n ($n = 1$ a 3) dos elementos (Silva, 2012). Tomando a derivada espacial da matriz \mathbf{K}_e , temos,

$$\frac{\partial\mathbf{K}_e}{\partial x_p} = \frac{\partial\mathbf{K}_e}{\partial x_n}, \quad (2.16)$$

em que n é a numeração dentro do sistema elemental referente a coordenada x_p . Na Figura 2.1 temos os elementos 5, 23 e 27 e o nó da medida muda de posição dentro de cada elemento. Assim a derivada do elemento 5 só terá a componente x_2 da derivada espacial, e os elementos 23 e 27 terão as componentes x_1 e x_3 , respectivamente.

O mesmo procedimento é realizado para obter a derivada de $\partial\hat{H}_y^s(x_p, z_p)/\partial z_p$. Para isso, acrescentamos uma nova linha em \mathbf{Q}^T que seleciona o elemento $\partial\hat{H}_y^s(x_p, z_p)/\partial z_p$ no vetor $\partial\mathbf{u}/\partial z_p$. Nota, cada linha da matriz \mathbf{Q}^T seleciona somente uma componente para cada ponto de medida. No Apêndice A mostramos as derivadas para cada posição elemental de $\partial\mathbf{K}_e/\partial x_n$ e $\partial\mathbf{K}_e/\partial z_n$.

Para otimizar esse processo nós não montamos a matriz $\partial\mathbf{K}/\partial x$, realizamos a multiplicação com o vetor \mathbf{u} usando apenas os nós com valores de derivadas diferente de zero. Além disso, para o caso da modelagem de um caminharmento de EM34 (*offset* e frequência constante) a matriz \mathbf{K} é a mesma para as duas fontes e não depende do deslocamento fonte-receptor, portanto, realiza-se somente uma fatoração para todos os pontos

do caminhamento e para as duas fontes.

2.3.3 Teste de avaliação da modelagem

Selecionamos um modelo 1D para validar a modelagem 2D das fontes dipolares, principalmente, validar a derivada semi-analítica da componente H_z . O modelo simula um semi-espaco em que inserimos uma camada de espessura de 10 metros a profundidade de 20 metros. Realizamos dois testes em que a camada é condutiva (10 ohm-m) e o semi-espaco resistivo (100 ohm-m), e com a camada resistiva (100 ohm-m) e semi-espaco condutivo (10 ohm-m). Foram modeladas as fontes VMD e HMD com as três configurações fonte-receptor do equipamento EM34.

A modelagem 1D foi realizada com o software do professor Valdelírio Silva disponível em <https://tatusoftware.com/>. A Figura 2.2 mostra a comparação da parte imaginária das componentes H_z e H_y para as duas modelagens. Obtivemos no modelo da camada condutiva o maior valor de erro relativo (0.3%), referente a componente H_z e espaçamento 40 metros.

2.4 PROBLEMA INVERSO

Para construir o algoritmo de inversão precisamos definir o problema direto e o modelo interpretativo. O modelo interpretativo para o problema direto 1D é definido por m camadas homogêneas e infinitas no plano (x, y) . Para o problema 2D, é constituído por uma malha regular dividida em m células retangulares justapostas, infinitas em y , cujas resistividades são constantes dentro de cada célula. As observações são tomadas acima da superfície e dos modelos interpretativos.

Nós aplicamos a inversão conjunta dos dados de EM34 para os dois dipolos (VMD e HMD). Gómez-Treviño et al. (2002) mostram que a inversão conjunta dessas duas fontes melhora a estimativa da resistividade do meio.

A inversão proposta estima a partir dos vetores de observação \mathbf{h}_z^o e \mathbf{h}_y^o n -dimensionais o vetor \mathbf{p} de m parâmetros ($m > n$) contendo a resistividade da subsuperfície. Na inversão conjunta minimizamos a seguinte função objeto,

$$\lambda(\mathbf{p}) = \gamma_z \left\| \frac{\mathbf{h}_z(\mathbf{p})}{\mathbf{h}_z^o} - 1 \right\|^2 + \gamma_y \left\| \frac{\mathbf{h}_y(\mathbf{p})}{\mathbf{h}_y^o} - 1 \right\|^2 + \mu_r \phi_r(\mathbf{p}) + \mu_a \phi_a(\mathbf{p}), \quad (2.17)$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana (norma l_2), γ_z e γ_y são fatores de normalização, μ_r o parâmetro de regularização do funcional regularizador ϕ_r e μ_a o parâmetro de regularização do funcional regularizador de igualdade absoluta ϕ_a . Os funcionais $\mathbf{h}_z(\mathbf{p})$ e $\mathbf{h}_y(\mathbf{p})$ representam a parte imaginária dos campos calculados em \mathbf{p} ,

$$\mathbf{h}_z(\mathbf{p}) = \text{Im} \left\{ \frac{H_z}{H_0} \right\}, \quad \mathbf{h}_y(\mathbf{p}) = \text{Im} \left\{ \frac{H_y}{H_0} \right\}, \quad (2.18)$$

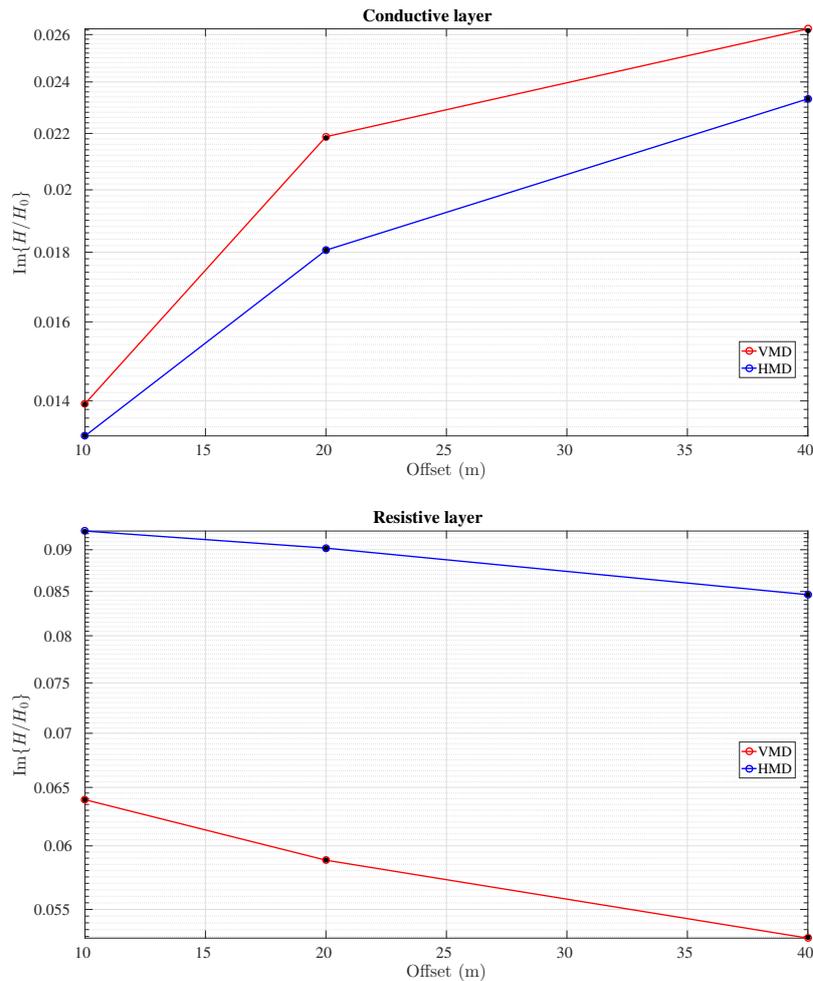


Figura 2.2: Comparação entre a modelagem 1D e 2D. Os pontos são os campos calculados na modelagem 1D. A linhas vermelha e azul são as componentes H_z e H_y , respectivamente, calculadas na modelagem 2D. Foram modelados os três espaçamentos fonte-receptor do equipamento EM34.

Os vetores \mathbf{h}_z^o e \mathbf{h}_y^o são obtidos a partir das leituras de condutividade aparente do equipamento EM34 (McNeill, 1980), dados pela seguinte relação,

$$\mathbf{h}_z^o = \frac{\omega\mu_0 r^2}{4} \sigma_a^{VMD}, \quad \mathbf{h}_y^o = \frac{\omega\mu_0 r^2}{4} \sigma_a^{HMD}. \quad (2.19)$$

Resolvemos iterativamente este problema inverso não linear através do método de Gauss-Newton com a estratégia de Marquardt (Marquardt, 1963). Utilizamos o vínculo de desigualdade apresentado por Barbosa et al. (1999), colocando um limite inferior e superior para a estimativa dos parâmetros e assim adicionando informação geológica a priori. Além disso, tendo em vista que a variação da resistividade dentro de ambientes geológicos é muito grande, utilizamos a derivada do logaritmo dos parâmetros, dessa forma diminuimos essa variação dos valores e não permitimos que se obtenha valores negativos.

Os funcionais regularizadores utilizados nas inversões foram o Suavidade Global (*Oc-*

cam's inversion, Constable et al. (1987)), Variação Total e igualdade absoluta (Martins et al., 2011). Utilizamos a metodologia apresentada por Martins (2009) para tornar a Hessiana do Variação Total melhor condicionada.

Para que não haja uma maior influência de uma fonte no processo da inversão do que da outra, os funcionais de ajuste são definidos com a diferença relativa entre o dado observado e o dado calculado, assim ambos os funcionais tem a mesma faixa de variação. Além disso, nós utilizamos fatores de normalização, bem como Barbosa et al. (1999) sugere, e são dados pela razões,

$$\gamma_z^{(k)} = \frac{E_r}{E_y^{(k)}}, \quad \gamma_y^{(k)} = \frac{E_r}{E_z^{(k)}}, \quad (2.20)$$

avaliadas na k -ésima iteração, das normas Euclidianas das Hessianas dos funcionais do regularizador Suavidade Global (E_r) e do ajuste da fonte VMD ($E_z^{(k)}$) e HMD ($E_y^{(k)}$). Barbosa et al. (1999) utiliza esses fatores de normalização nos funcionais regularizadores, nós propomos utilizá-los nos funcionais de ajuste. Assim, normalizamos os funcionais de ajuste de cada fonte (VMD e HMD) em relação ao funcional regularizador comum a ambas (Suavidade Global). Esses fatores servem para balancear os vetores gradientes e matrizes Hessianas dos funcionais de ajuste que trazem consigo a normalização pelos vetores de observação.

Nos dois casos que utilizamos os regularizadores Suavidade Global ou Variação Total, utilizamos a norma da Hessiana do Suavidade, por se tratar de um valor constante e a Hessiana da Variação Total apresentar elementos de valores exorbitantes.

No caso da inversão 1D nós utilizamos o vínculo proposto por Santos (2004) para essas fontes dipolares. Nesse trabalho várias inversões 1D são lateralmente vinculadas pelo regularizador Suavidade Global. Nós acrescentamos o regularizador Variação Total para essa inversão.

2.4.1 Matriz sensibilidade para a modelagem 1D

A matriz sensibilidade descreve a sensibilidade das observações em relação aos parâmetros. Essa matriz é avaliada na k -ésima iteração, sendo o ij -ésimo elemento dado pela derivada do funcional geofísico \mathbf{h} (modelo direto) em relação aos parâmetros \mathbf{p} :

$$\mathbf{A}^{(k)} \equiv \{a_{ij}\} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}. \quad (2.21)$$

Nós propomos o cálculo das derivadas dos funcionais $\mathbf{h}_z(\mathbf{p})$ e $\mathbf{h}_y(\mathbf{p})$ em relação aos parâmetros \mathbf{p} de forma semi-analítica. Derivando as equações 2.1 e 2.2 em relação a

condutividade σ_j da j -ésima camada, temos,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{H_z}{H_0} \right) = r^3 \int \frac{\partial R_{TE}^{(0)}}{\partial \sigma_j} k_r^2 J_0(k_r r) dk_r , \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{H_y}{H_0} \right) &= (2y^2 - r^2) \int \frac{\partial R_{TE}^{(0)}}{\partial \sigma_j} k_r J_1(k_r r) dk_r \\ &\quad - y^2 r \int \frac{\partial R_{TE}^{(0)}}{\partial \sigma_j} k_r^2 J_0(k_r r) dk_r , \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde,

$$\frac{\partial R_{TE}^{(0)}}{\partial \sigma_j} = \frac{-2Y_0}{(Y_0 + Y_1^*)} \frac{\partial Y_1^*}{\partial \sigma_j} . \quad (2.24)$$

No trabalho de Vedanti et al. (2005) é realizada a derivada analítica 1D para sondagens de eletrorresistividade. Seguindo esse trabalho, temos a derivada da admitância aparente da primeira camada em relação aos m parâmetros,

$$\frac{\partial Y_1^*}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial Y_1^*}{\partial Y_2^*} \frac{\partial Y_2^*}{\partial Y_3^*} \cdots \frac{\partial Y_{j-1}^*}{\partial Y_j^*} \frac{\partial Y_j^*}{\partial \sigma_j} , \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial Y_j^*}{\partial Y_{j+1}^*} = (1 - T_j^2) / C_j^2 , \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial Y_j^*}{\partial \sigma_j} = \left[\frac{\left(\frac{T_j}{\zeta} + \frac{Y_j}{S_j} \right)}{C_j} - \frac{\left(\frac{Y_{j+1}^*}{Y_j^2} (Y_j S_j - \frac{T_j}{\zeta}) \right) (Y_{j+1}^* + Y_j T_j)}{C_j^2} \right] \left(\frac{\zeta}{2u_j} \right) , \quad (2.27)$$

onde,

$$T_j = \tanh(u_j h_j) , \quad (2.28)$$

$$S_j = \operatorname{sech}(u_j h_j) h_j , \quad (2.29)$$

$$C_j = (1 + (Y_{j+1}^* / Y_j) T_j) \quad (2.30)$$

na última camada temos,

$$\frac{\partial Y_m^*}{\partial \sigma_m} = \frac{\partial Y_m}{\partial \sigma_m} = \frac{1}{2u_m} . \quad (2.31)$$

Vedanti et al. (2005) apresentam a Hessiana completa com as derivadas de primeira e segunda ordem do funcional do ajuste. Nós utilizamos o método de Gauss-Newton, portanto só precisamos da derivada de primeira ordem para montar a matriz Hessiana.

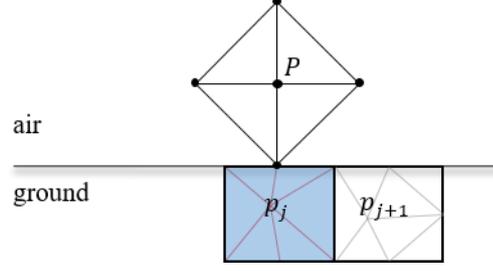


Figura 2.3: Localização dos 6 elementos que fazem parte do parâmetro p_j (bloco azul), e do ponto de medida $P(x_p, z_p)$.

2.4.2 Matriz sensibilidade para a modelagem 2D

Para esse caso, obtemos a matriz sensibilidade derivando os sistema de equações lineares do FEM (2.10) em relação ao j -ésimo parâmetro,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} \mathbf{u} \right). \quad (2.32)$$

Grayver et al. (2013) apresenta a abordagem que aproveita a simetria da matriz \mathbf{K} para obter as sensibilidades nos n pontos de medidas. Assim como mostrado na subseção 2.3.2, nós multiplicamos \mathbf{Q}^T que seleciona o elemento $\partial \hat{H}_y^s(x_p, z_p)/\partial p_j$ no vetor $\partial \mathbf{u}/\partial p_j$, e realizando a transposta de ambos os lados, temos a derivada no ponto $P(x_p, z_p)$ dada por,

$$\left[\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right]^T = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} \mathbf{u} \right)^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}. \quad (2.33)$$

As derivadas em \mathbf{f} e \mathbf{K} terão valores diferentes de zero somente nos elementos que apresentam o j -ésimo parâmetro. A Figura 2.3 mostra os elementos que fazem parte do j -ésimo parâmetro e o ponto de observação $P(x_p, z_p)$. Então, podemos calcular a derivada de n pontos de medida em relação a m parâmetros fatorando a matriz \mathbf{K} uma única vez, e realizando n soluções do sistema 2.15. Esse procedimento é repetido para cada frequência. O uso de \mathbf{Q} é válido quanto a otimização quando $m > n$, o que acontece na maioria dos casos em geofísica.

Para o HMD a derivada da componente $\partial H_y/\partial p_j$ sai direto do sistema 2.33, já que essa componente é uma variável do FEM. Para o VMD temos que realizar as derivadas espaciais (equação 2.11). Assim como abordada na subseção 2.3.2, a derivada em relação a x_p do sistema de equações 2.33 é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left[\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right]^T = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} \mathbf{u} \right)^T \frac{\partial \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}}{\partial x_p}, \quad (2.34)$$

sendo que o termo entre parêntesis não depende das coordenadas do ponto P por conta deste estar fora das heterogeneidades. Derivar $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}$ equivale a derivar o sistema 2.15

em relação a x_p , e sabendo que \mathbf{Q} não depende dessa variável, temos,

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_p} \mathbf{v} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_p} = \mathbf{0} , \quad (2.35)$$

então, a derivada de $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$ em relação a x_p é dada pelo vetor solução $\partial\mathbf{v}/\partial x_p$ do sistema,

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_p} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_p} \mathbf{v} . \quad (2.36)$$

sendo o vetor \mathbf{v} obtido no sistema 2.15 e $\partial\mathbf{K}/\partial x_p$ dada pela derivada das matrizes elementares \mathbf{K}_e .

Este caso é similar ao visto na subseção 2.3.2, portanto, para uma otimização nós não montamos a matriz $\partial\mathbf{K}/\partial p_j$ e o vetor $\partial\mathbf{f}/\partial p_j$, realizamos as operações somente com os elementos do j -ésimo parâmetro. Como podemos notar, para realizar a derivada de $\partial H_z/\partial p_j$ é necessário solucionar os dois sistemas 2.15 e 2.36 para cada derivada espacial ($\partial x_p, \partial z_p$), o que pode tornar o processo lento. No entanto, realizamos os procedimentos de obter as derivadas ($\partial H_z/\partial p_j$ e $\partial H_y/\partial p_j$) e os campos (H_z e H_y) em conjunto, assim aproveitamos algumas estruturas comuns a ambos os procedimentos, dentre elas: as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{Q} , e aproveitamos a operação $\partial\mathbf{K}/\partial x_p \mathbf{v}$.

2.5 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

O modelo escolhido simula um ambiente geológico com uma camada condutiva (10 ohm-m) inserida num meio resistivo (10^2 ohm-m) e com um embasamento mais resistivo (10^3 ohm-m). Além disso, temos dois corpos condutivos localizados em profundidades distintas com a mesma condutividade da camada. Esse modelo é baseado no possível ambiente geológico que podemos encontrar no dado real que analisaremos na próxima seção. A Figura 2.4 mostra o modelo geológico simulado.

As medidas foram tomadas de -100 a 100 metros e espaçadas de 10 metros, sendo que o ponto de observação é dado no centro do arranjo fonte-receptor. Utilizamos os três arranjos para cada fonte VDM e HDM (McNeill (1980)). Além disso, adicionamos 2% de ruído uniforme de média zero nos dados sintéticos.

Na inversão 1D estimamos a resistividade de 12 camadas, cujas espessuras mudam com a profundidade sendo a última camada um semi-espaco infinito. Na inversão 2D discretizamos uma região da subsuperfície em 44×12 prismas no plano (x, z) , sendo que os primas das extremidades laterais são alongados de tamanho 200 m, e os prismas da base são de tamanho 55 m.

Para ambas inversões utilizamos o regularizador de igualdade absoluta em conjunto com o Suavidade Global ou Variação Total. Adicionamos a informação da resistividade da camada condutiva através desse regularizador de igualdade absoluta.

A Figura 2.5 mostra os resultados da inversão 1D para os regularizadores Suavidade Global e Variação Total. Cada fileira de blocos na vertical representa uma inversão 1D, sendo o ponto de observação no meio de cada fileira. Utilizamos a vinculação LCI proposta por Santos (2004). Podemos observar que nos dois resultados a presença dos corpos não foram recuperados. Além disso, nas duas estimativas tem-se altos valores de resistividade na região do corpo condutivo mais raso, segundo Kang et al. (2013) isso se deve ao comportamento da componente em quadratura do campo quanto ao aumento no número de indução. Nesse trabalho eles abordam os *pitfalls* da inversão 1D.

Apesar de não representarem uma boa estimativa da subsuperfície para esse caso, as inversões 1D nos ajudam em duas características: *i*) elas auxiliam na sintonização dos parâmetros de regularização, assim, evita-se de realizar muitos testes na inversão 2D; *ii*) o resultado gerado pode ser usado como aproximação inicial na inversão 2D, isso diminui a quantidade de iterações deste processo.

Por fim, a Figura 2.6 mostra o resultado da inversão 2D do Suavidade Global, no qual se consegue notar a presença dos corpos, no entanto, não se consegue uma boa delimitação deles. Por outro lado, no Variação Total (Figura 2.7) já se consegue um melhor delineamento das estruturas condutivas, apesar de não delinear bem a base delas.

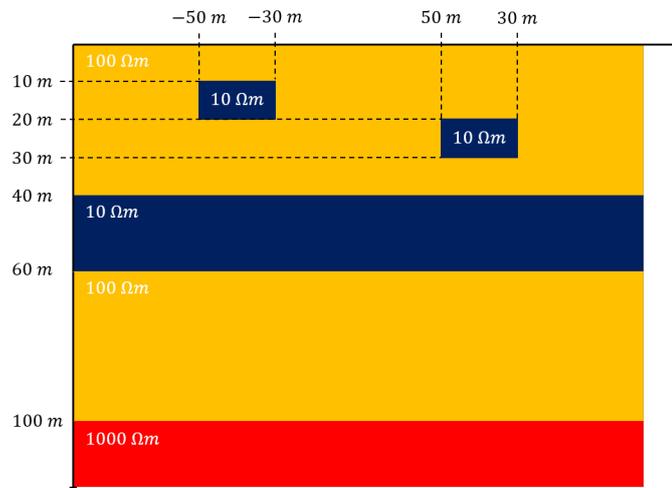


Figura 2.4: Modelo geológico simulado.

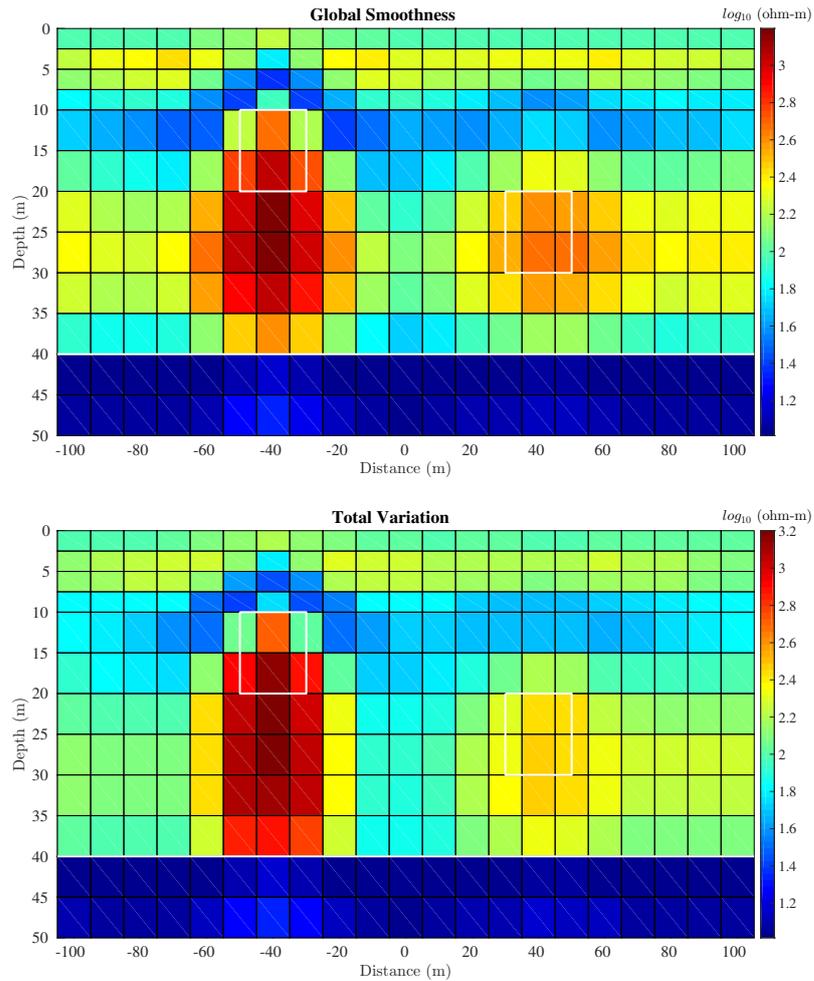


Figura 2.5: Resultado da inversão 1D utilizando os vínculos de Suavidade Global (acima) e Variação Total (abaixo) em conjunto com igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.

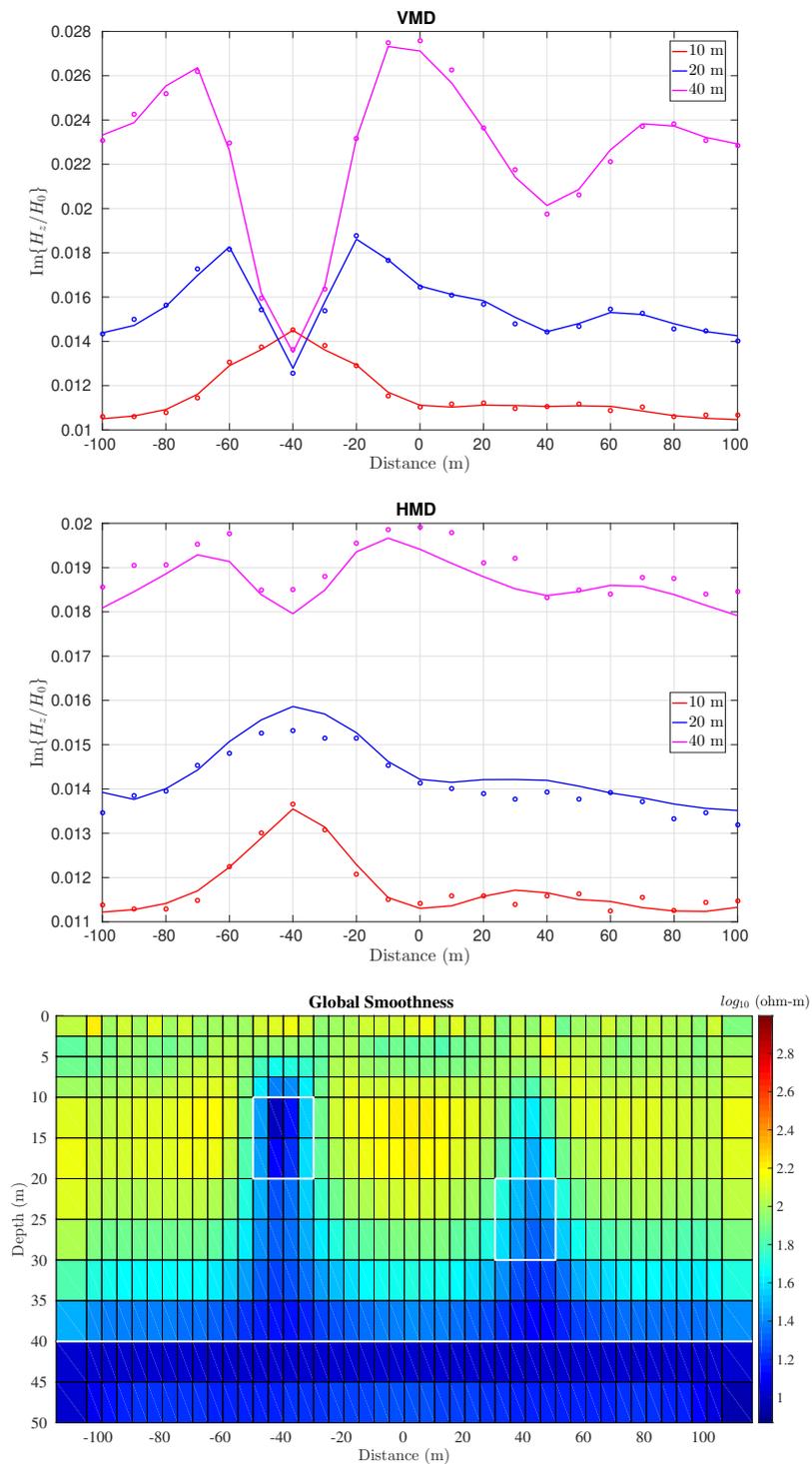


Figura 2.6: Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Suavidade Global e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.

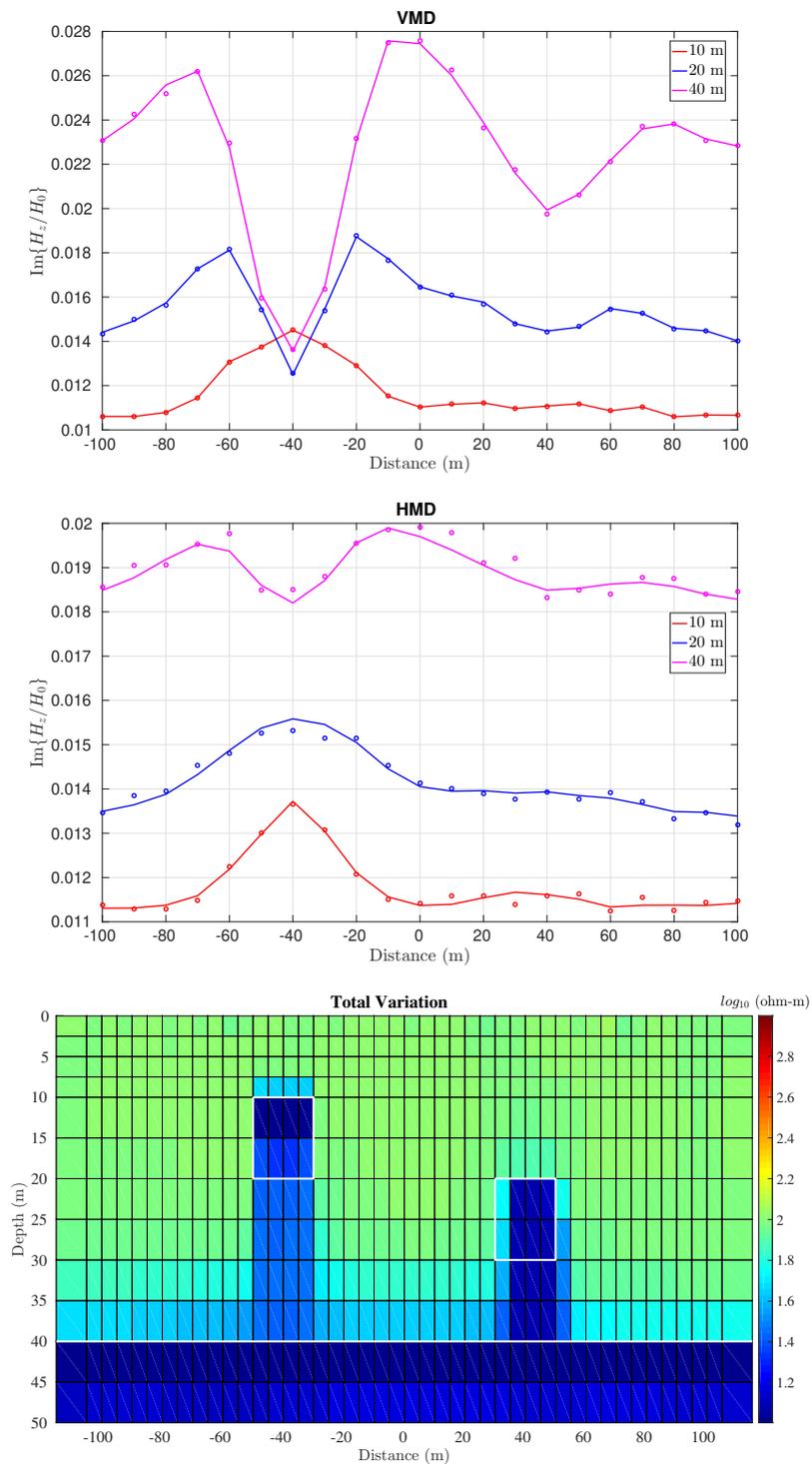


Figura 2.7: Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Variação Total e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. As linhas em branco delimitam as estruturas condutivas.

2.6 APLICAÇÃO A DADOS REAIS

Nós apresentamos os dados coletados de EM34 na cidade de Salinópolis, nordeste do Estado do Pará, Brasil (Figura 2.8). A geologia local consiste em uma sequência carbonática miocênica (Formação Pirabas), sotoposta por sedimentos terrígenos continentais terciários e quaternários (Formação Barreiras e Pós-Barreiras) (Rossetti et al., 1989; Rossetti, 2001). A Formação Pirabas apresenta maior espessura nessa região, sendo a principal fonte de abastecimento de água local.

O levantamento foi realizado nas proximidades do posto de captação de água Açai da COSANPA (Companhia de Saneamento do Pará), onde tivemos acesso a dados de poços. Foram feitas 20 medidas espaçadas de 10 metros com as duas configurações de bobinas (VMD e HMD), no sentido nordeste-sudoeste (Figura 2.8).

Freimann et al. (2014) apresentam uma correlação de perfilagem de poços nessa região com o objetivo de mapear as continuidades laterais de reservatórios de água. Nós utilizamos as informações geológicas contidas na seção litológica **C-H-I** sugerida nesse trabalho (Figura 2.9). Além disso, eles apresentam o perfil litológico do poço **O** (Figura 2.8). De posse dessas informações a priori, nós as adicionamos à inversão através do regularizador de igualdade absoluta, assim, colocamos o reservatório de profundidade de 40 a 45 m com resistividade de 1 ohm-m.

Na inversão 1D estimamos a resistividade de 12 camadas, cujas espessuras mudam com a profundidade. Na inversão 2D discretizamos uma região da subsuperfície em 21×12 prismas no plano (x, z) , sendo que os prismas das extremidades laterais são alongados de tamanho 200 m, e os prismas da base são alongados até a profundidade de 100 m. A espessura das camadas e a dos prismas são as mesmas para as inversões 1D e 2D, exceto pela última camada ser um semi-espaço infinito e os prismas da base terem espessura de 55 metros.

A Figura 2.10 mostra os resultados da inversão 1D utilizando a vinculação LCI para os regularizadores Suavidade Global e Variação Total. O resultado de ambas inversões é muito próximo, e podemos observar a presença de uma camada condutiva nas profundidades de 40 a 60 m, que se estende de 20 a 130 m na horizontal. Essa camada pode estar relacionada a segunda camada da seção litológica.

As figuras 2.11 e 2.12 mostram os resultados das inversões 2D do Suavidade Global e da Variação Total, respectivamente. As estimativas dessas inversões 2D são muito próximas e correlatas com as estimativas das inversões 1D. Isso pode comprovar que o ambiente geológico é constituído por camadas predominantemente plano paralelas. Por fim, realizamos a interpretação do topo da segunda camada da seção litológica (linha branca nas figuras 2.11 e 2.12), que segundo Freimann et al. (2014) trata-se do segundo provável aquífero.

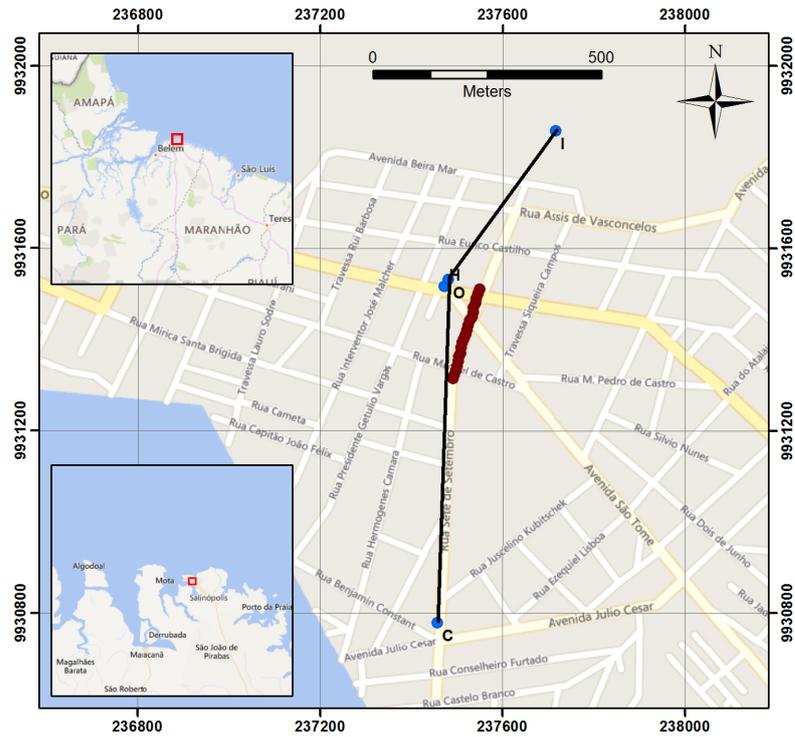


Figura 2.8: Localização da cidade de Salinópolis, e localização da seção litológica **C-H-I** proposta por Freimann et al. (2014) em linha preta, sendo os pontos azuis os poços **C**, **H**, **I** e **O**. Os pontos em vermelho são as observações tomadas no sentido nordeste-sudoeste.

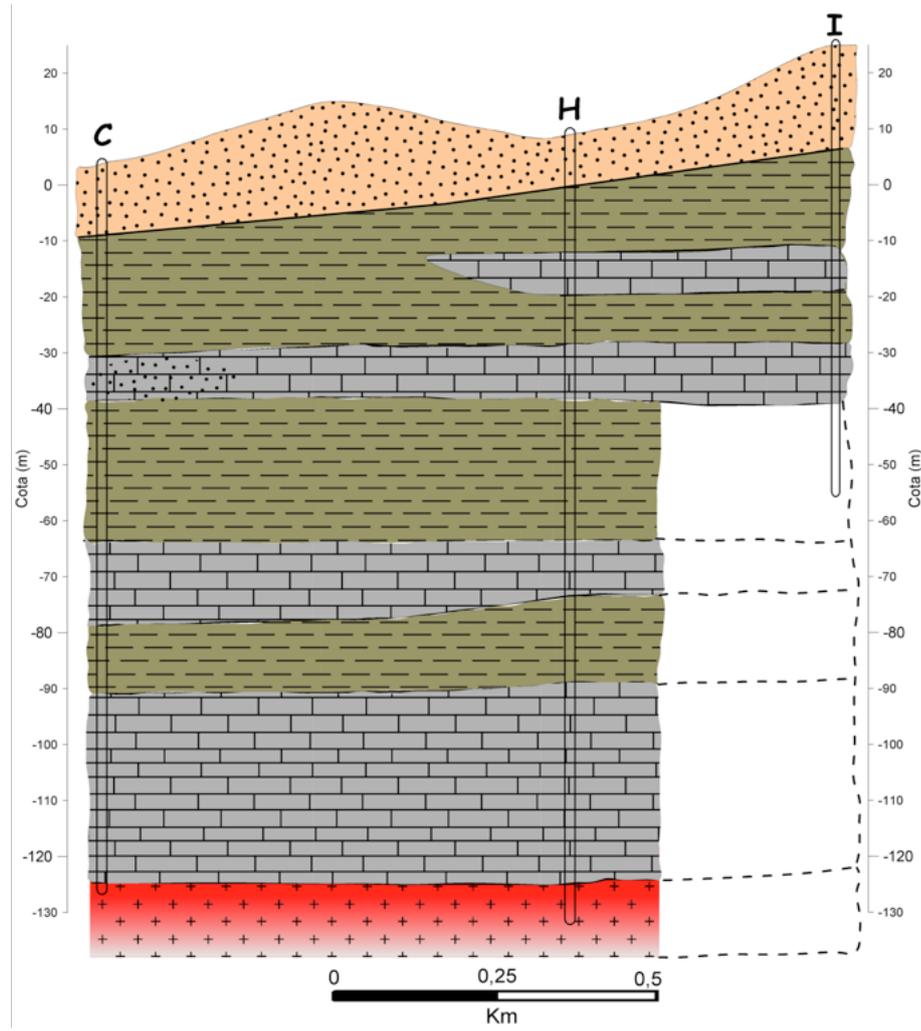


Figura 2.9: Seção litológica C-H-I sugerida por Freimann et al. (2014).

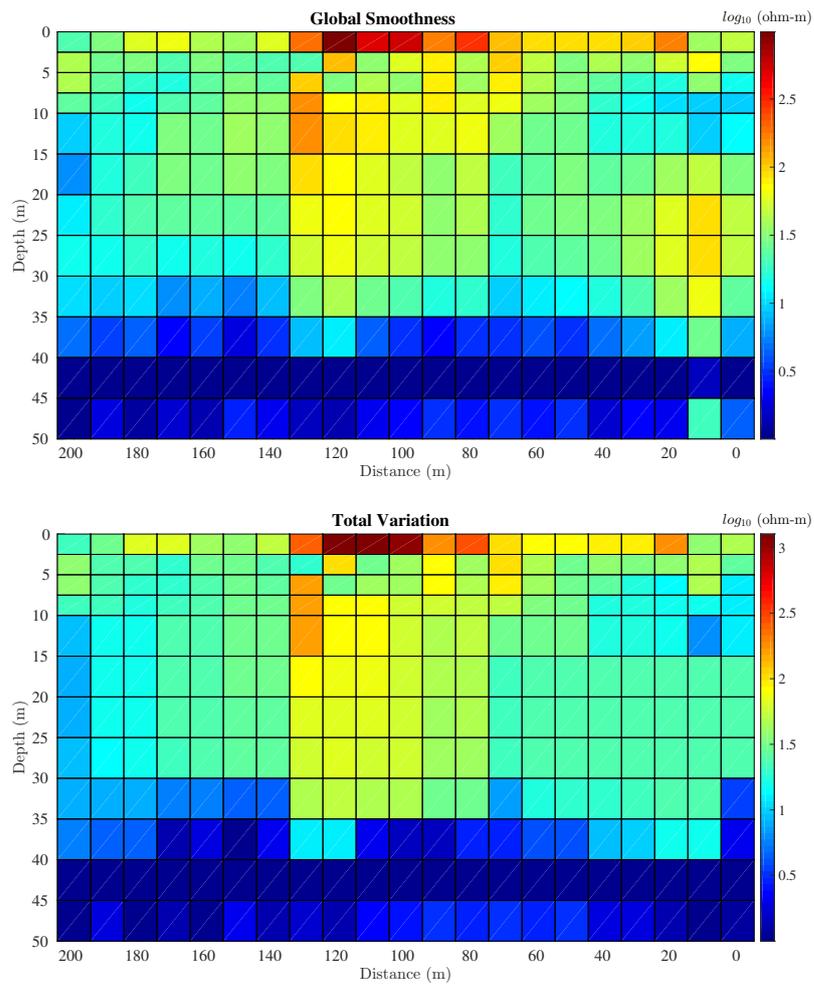


Figura 2.10: Resultado da inversão 1D utilizando os vínculos de Suavidade Global (acima) e Variação Total (abaixo) em conjunto com igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m.

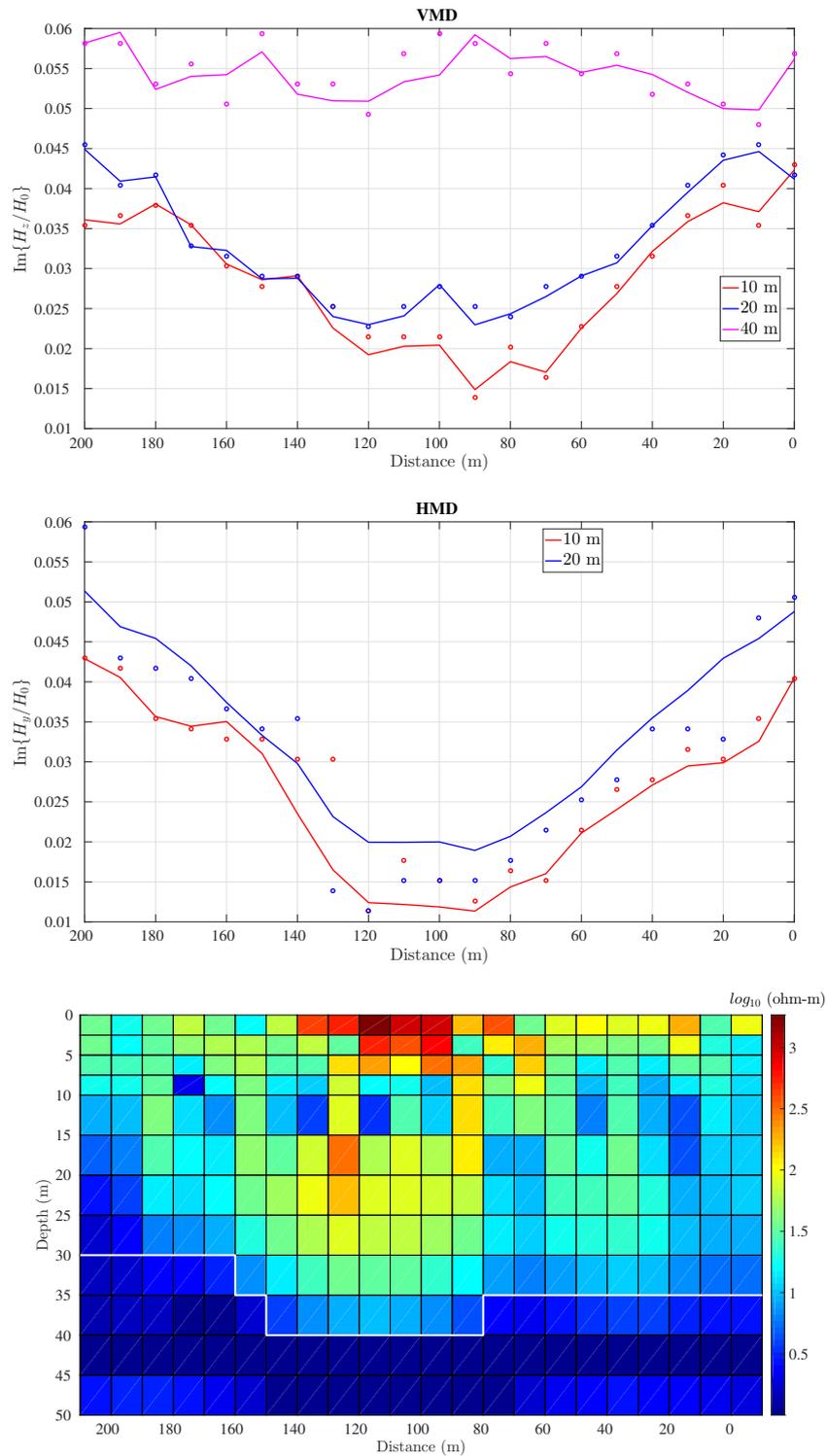


Figura 2.11: Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Suavidade Global e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. Interpretação do topo da segunda camada da seção litológica em linha branca.

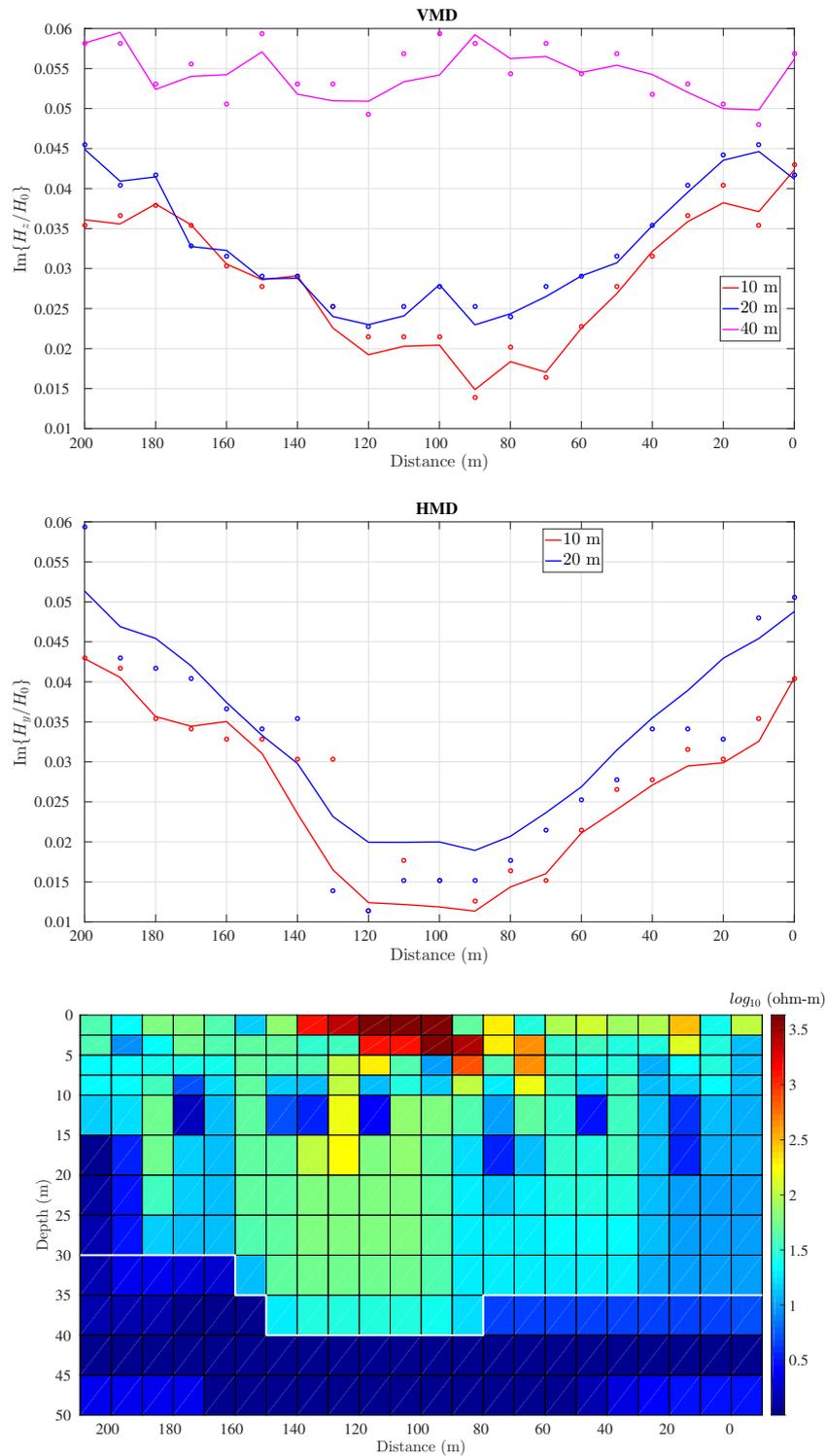


Figura 2.12: Acima, os dados sintéticos, em linha contínua, ajustados aos pontos observados (círculos) para as duas fontes VMD e HMD. Abaixo, o resultado da inversão 2D utilizando os vínculos de Variação Total e igualdade absoluta. Os valores de resistividade estão em $\log_{10}(\rho)$ ohm-m. Interpretação do topo da segunda camada da seção litológica em linha branca.

2.7 CONCLUSÃO

Apresentamos uma abordagem para a inversão de dados do equipamento EM34-3, a fim de obter uma melhor estimativa da distribuição de condutividade em subsuperfície. Construímos um algoritmo de inversão baseado no método Gauss-Newton e aplicamos a estratégia de Marquardt (Marquardt (1963)). Aplicamos um vínculo de desigualdade apresentado por Barbosa et al. (1999), que adiciona limites nos valores dos parâmetros o que nos permitiu incorporar mais informação geológica a priori. Adicionamos a inversão os regularizadores Suavidade Global e Variação Total, para obtermos uma solução única e estável. Realizamos a inversão conjunta das duas fontes dipolares (VMD e HMD), e propomos a utilização de fatores de normalização para os funcionais de ajuste de cada fonte (Barbosa et al., 1999).

Na inversão 1D, apresentamos uma derivada semi-analítica para calcular a matriz sensibilidade, como visto em Vedanti et al. (2005), utilizamos a regra da cadeia para derivar as admitâncias aparentes em relação a condutividade das camadas. Para inversão 2D, propomos uma derivada espacial semi-analítica que é realizada sobre o sistema de equações do FEM, na qual somente os elementos que compartilham a coordenada em que se realiza a derivada tem valores diferentes de zero. Seguindo Grayver et al. (2013) derivamos esse sistema de equações em relação aos parâmetros e obtemos a matriz sensibilidade. Realizamos essas duas derivadas e calculamos a matriz sensibilidade para as componentes que dependem da derivada espacial.

Os resultados das inversões do dado sintético mostraram que a inversão 2D teve uma melhor estimativa sobre a inversão 1D. Isso se deve a presença de corpos condutivos bidimensionais, que para a resposta 1D podem ser simuladas por camadas mais resistivas sobre camadas condutivas (Kang et al., 2013).

Por fim, os resultados da inversão 1D e 2D do dado real mostraram uma grande correlação entre elas, esse resultado pode comprovar um ambiente constituído por estratos plano paralelos. As seções litológicas apresentadas por Freimann et al. (2014) mostram essa característica das camadas. De posse de todas essas informações, sugerimos uma interpretação para o topo de um aquífero em subsuperfície.

REFERÊNCIAS

- Anderson, W. L., 1979, Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering: *Geophysics*, **44**, 1287–1305.
- Barbosa, V. C. F., J. B. C. Silva, and W. E. Medeiros, 1999, Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations: *Geophysics*, **64**, 754–764.
- Constable, S. C., R. L. Parker, and C. G. Constable, 1987, Occam’s inversion: a practical algorithm for generating smooth models from em sounding data: *Geophysics*, **52**, 289–300.
- Freimann, B. C., J. G. das Virgens Alves, and M. W. C. Silva, 2014, Estudo hidrogeológico através de perfis geofísicos de poços – Salinópolis - PA: *Águas Subterrâneas*, **28**, 14–30.
- Gómez-Treviño, E., F. J. Esparza, and S. Méndez-Delgado, 2002, New theoretical and practical aspects of electromagnetic soundings at low induction numbers: *Geophysics*, **67**, 1441–1451.
- Grayver, A. V., R. Streich, and O. Ritter, 2013, Three-dimensional parallel distributed inversion of csem data using a direct forward solver: *Geophysical Journal International*, **193**, 1432–1446.
- Guillemoteau, J., P. Sailhac, C. Boulanger, and J. Trules, 2015, Inversion of ground constant offset loop-loop electromagnetic data for a large range of induction numbers: *Geophysics*, **80**, E11–E21.
- Hohmann, G. W., 1987, Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics, *in* Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, Vol. 1, Theory: SEG, volume **1** of *Investigations in Geophysics*, 312–363.
- Kang, S., S. Jee Seol, Y. Chung, and H. Kwon, 2013, Pitfalls of 1d inversion of small-loop electromagnetic data for detecting man-made objects: *Journal of Applied Geophysics*, **90**, 96–109.
- Kruk, J., J. Meekes, P. Van Den Berg, and J. Fokkema, 2000, An apparent-resistivity concept for low-frequency electromagnetic sounding techniques: *Geophysical Prospecting*, **48**, 1033 – 1052.
- Li, Y., and K. Key, 2007, 2d marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 1 — an adaptive finite-element algorithm: *Geophysics*, **72**, WA51–WA62.
- Marquardt, D. W., 1963, An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **11**, 431–441.
- Martins, C. M., 2009, Inversão gravimétrica do relevo 3d de bacias sedimentares e da variação da densidade usando informação a priori sobre o ambiente geológico: Tese de doutorado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro.
- Martins, C. M., W. A. Lima, V. C. F. Barbosa, and J. B. C. Silva, 2011, Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 — mathematical details and applications: *Geophysics*, **76**, I1–I12.
- McNeill, J. D., 1980, Electromagnetic terrain conductivity measurements at low induction numbers: Technical Note TN-6, Geonics Ltd.
- Méndez-Delgado, S., E. Gómez-Treviño, and M. A. Pérez-Flores, 1999, Forward modeling of direct current and low-frequency electromagnetic fields using integral equations: *Geophysical Journal International*, **137**, 336–352.
- Oldenburg, D. W., and R. G. Ellis, 1991, Inversion of geophysical data using an approximate inverse mapping: *Geophysical Journal International*, **105**, 325–353.
- Pérez-Flores, M. A., S. Méndez-Delgado, and E. Gómez-Treviño, 2001, Imaging low-

- frequency and dc electromagnetic fields using a simple linear approximation: *Geophysics*, **66**, 1067–1081.
- Pérez-Flores, M. A., R. G. Antonio-Carpio, E. Gómez-Treviño, I. Ferguson, and S. Méndez-Delgado, 2012, Imaging of 3d electromagnetic data at low-induction numbers: *Geophysics*, **77**, WB47–WB57.
- Rossetti, D., 2001, Late cenozoic sedimentary evolution in northeastern Pará, Brazil, within the context of sea level changes: *Journal of South American Earth Sciences*, **14**, 77–89.
- Rossetti, D. F., W. Truckenbrodt, and A. M. Góes, 1989, Estudo paleoambiental e estratigráfico dos sedimentos barreiras e pós-barreiras na região bragantina, nordeste do Pará: *Boletim do Museu Paraense Emílio Goeldi – Série Ciências da Terra*, 25–74.
- Santos, F. A. M., 2004, 1-d laterally constrained inversion of em34 profiling data: *Journal of Applied Geophysics*, **56**, 123 – 134.
- Santos, F. A. M., J. Triantafilis, R. S. Taylor, S. Holladay, and K. E. Bruzgulis, 2010, Inversion of conductivity profiles from em using full solution and a 1-d laterally constrained algorithm: *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, **15**, 163–174.
- Silva, V. d. S. e., 2012, Modelagem 2,5d dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência – emmf: PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém.
- Sternberg, B. K., 1979, Electrical resistivity structure of the crust in the southern extension of the canadian shield – layered earth models: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **84**, 212–228.
- Triantafilis, J., and F. A. M. Santos, 2009, 2dimensional soil and vadose-zone representation using an em38 and em34 and a laterally constrained inversion model: *Australian Journal of Soil Research - AUST J SOIL RES*, **47**.
- Triantafilis, J., C. H. Terhune IV, and F. A. M. Santos, 2013, An inversion approach to generate electromagnetic conductivity images from signal data: *Environmental Modelling & Software*, **43**, 88–95.
- Triantafilis, J., V. Wong, F. A. M. Santos, D. Page, and R. Wege, 2012, Modeling the electrical conductivity of hydrogeological strata using joint-inversion of loop-loop electromagnetic data: *Geophysics*, **77**, WB99–WB107.
- Vedanti, N., R. Srivastava, J. Sagode, and V. Dimri, 2005, An efficient 1d occam’s inversion algorithm using analytically computed first- and second-order derivatives for dc resistivity soundings: *Computers & Geosciences*, **31**, 319–328.
- Ward, S. H., and G. W. Hohmann, 1987, Electromagnetic theory for geophysical applications, *in* Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, Vol. 1, Theory: SEG, volume **1** of *Investigations in Geophysics*, 130–311.

APÊNDICES

A– DERIVADA ANALÍTICA DAS MATRIZES ELEMENTARES DO FEM

Apresentamos as derivadas espaciais das matrizes elementares do método de Elementos Finitos (FEM), utilizadas para obter a componente H_z (equação 2.11). Silva (2012) mostra que a matriz de coeficientes \mathbf{K} é construída a partir de quatro matrizes elementares, onde cada uma representa o modo de propagação TE,

$$\mathbf{K}_e^{TE} = \frac{-\sigma_e}{4Au_e^2} \mathbf{I} - \frac{A\sigma_e}{12} \mathbf{II}, \quad (\text{A-1})$$

o modo de propagação TM,

$$\mathbf{K}_e^{TM} = \frac{-\zeta}{4Au_e^2} \mathbf{I} - \frac{A\zeta}{12} \mathbf{II}, \quad (\text{A-2})$$

o modo de propagação acoplado TE,

$$\mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{ik_y}{4Au_e^2} \mathbf{III}, \quad (\text{A-3})$$

sendo que o modo de propagação acoplado TM,

$$\mathbf{K}_e^{ACTM} = -\mathbf{K}_e^{ACTE}, \quad (\text{A-4})$$

em que σ_e é a condutividade de um elemento, e $u_e^2 = k_y^2 - \zeta\sigma_e$. As matrizes \mathbf{I} , \mathbf{II} e \mathbf{III} , são dadas por,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{III} = \begin{bmatrix} 0 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & 0 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $a_1 = x_2z_3 - x_3z_2$, $a_2 = x_3z_1 - x_1z_3$, $a_3 = x_1z_2 - x_2z_1$, $b_1 = z_2 - z_3$, $b_2 = z_3 - z_1$, $b_3 = z_1 - z_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_3 = x_2 - x_1$, e A a área do elemento e , dada por $A = 0.5(a_1 + a_2 + a_3)$.

A derivada de \mathbf{K}_e^{TE} em relação a x_n , sendo n a numeração no sistema elementar que vai de 1 a 3, temos para $n = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e b_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e b_1}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-5})$$

para $n = 2$,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e b_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e b_2}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-6})$$

e para $n = 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e b_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e b_3}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-7})$$

onde as derivadas de \mathbf{I} em relação a x_n ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 0 & c_1 & -c_1 \\ c_1 & 2c_2 & c_3 - c_2 \\ -c_1 & c_3 - c_2 & -2c_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} -2c_1 & -c_2 & c_1 - c_3 \\ -c_2 & 0 & c_2 \\ c_1 - c_3 & c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 2c_1 & c_2 - c_1 & c_3 \\ c_2 - c_1 & -2c_2 & -c_3 \\ c_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A derivada de \mathbf{K}_e^{TM} em relação a x_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta b_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta b_1}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-8})$$

em relação a x_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta b_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta b_2}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-9})$$

e em relação a x_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta b_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta b_3}{24} \mathbf{II}. \quad (\text{A-10})$$

As derivadas para os modos acoplados $\partial \mathbf{K}_e^{ACTM} / \partial x_n = -\partial \mathbf{K}_e^{ACTE} / \partial x_n$, logo a derivada de \mathbf{K}_e^{ACTE} em relação a x_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y b_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-11})$$

em reação a x_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y b_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-12})$$

e em reação a x_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y b_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-13})$$

onde as derivadas de \mathbf{III} em relação a x_n ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{III} &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_1 \\ b_1 & 0 & b_3 + b_2 \\ -b_1 & -b_3 - b_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{III} &= \begin{bmatrix} 0 & -b_2 & -b_3 - b_1 \\ b_2 & 0 & -b_2 \\ b_1 + b_3 & b_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{III} &= \begin{bmatrix} 0 & b_2 + b_1 & b_3 \\ -b_1 - b_2 & 0 & -b_3 \\ -b_3 & b_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De maneira similar, obtemos a derivada de \mathbf{K}_e^{TE} em relação a z_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e c_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e c_1}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-14})$$

em relação a z_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e c_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e c_2}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-15})$$

e em relação a z_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_3} \mathbf{K}_e^{TE} = \frac{\sigma_e c_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_e}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \mathbf{I} \right) - \frac{\sigma_e c_3}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-16})$$

onde as derivadas de \mathbf{I} em relação a z_n ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_1 \\ -b_1 & -2b_2 & b_2 - b_3 \\ b_1 & b_2 - b_3 & 2b_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial z_2}\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 2b_1 & b_2 & b_3 - b_1 \\ b_2 & 0 & -b_2 \\ b_3 - b_1 & -b_2 & -2b_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial z_3}\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} -2b_1 & b_1 - b_2 & -b_3 \\ b_1 - b_2 & 2b_2 & b_3 \\ -b_3 & b_3 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A derivada de \mathbf{K}_e^{TM} em relação a z_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta c_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta c_1}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-17})$$

em reação a z_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta c_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta c_2}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-18})$$

e em reação a z_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\mathbf{K}_e^{TM} = \frac{\zeta c_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{I} - \frac{\zeta}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \mathbf{I} \right) - \frac{\zeta c_3}{24} \mathbf{II}, \quad (\text{A-19})$$

Finalmente, as derivadas para os modos acoplados $\partial \mathbf{K}_e^{ACTM} / \partial z_n = -\partial \mathbf{K}_e^{ACTE} / \partial z_n$, assim, a derivada de \mathbf{K}_e^{ACTE} em relação a z_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y c_1}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-20})$$

em reação a z_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y c_2}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-21})$$

e em reação a z_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\mathbf{K}_e^{ACTE} = \frac{-ik_y c_3}{8u_e^2 A^2} \mathbf{III} + \frac{ik_y}{4u_e^2 A} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} \mathbf{III} \right), \quad (\text{A-22})$$

onde as derivadas de **III** em relação a z_n ,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{III} = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 & c_1 \\ c_1 & 0 & c_3 + c_2 \\ -c_1 & -c_3 - c_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{III} = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 & -c_3 - c_1 \\ c_2 & 0 & -c_2 \\ c_1 + c_3 & c_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{III} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 + c_1 & c_3 \\ -c_1 - c_2 & 0 & -c_3 \\ -c_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}.$$