



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Inversão conjunta e análise de resolução

WILLIAMS ALMEIDA LIMA

BELÉM

2017

WILLIAMS ALMEIDA LIMA

Inversão conjunta e análise de resolução

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos sísmicos

Orientador: João Batista Corrêa da Silva

BELÉM

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Lima, Williams Almeida, 1976-

Inversão conjunta e análise de resolução / Williams Almeida
Lima. – 2017

114 f. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: João Batista Corrêa da Silva

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de
Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2017.

1. Inversão (Geofísica). I. Título.

CDD 22. ed.: 550

Elaborado por
Hélio Braga Martins
CRB-2/698

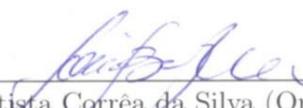
WILLIAMS ALMEIDA LIMA

Inversão conjunta e análise de resolução

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Data de aprovação: 30 de novembro de 2017

Banca Examinadora:



João Batista Corrêa da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Pará



Jessé Carvalho Costa (Coorientador)
Universidade Federal do Pará



Darciléa Ferreira Santos
Universidade Federal do Pará



Milton José Porsani
Universidade Federal da Bahia



Walter Eugênio de Medeiros
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Ao meu filho

Benjamin

e a minha amada esposa

Susana

AGRADECIMENTOS

A minha família.

Agradeço ao meu orientador Prof. João Batista Corrêa da Silva por todo o apoio durante este projeto.

Agradeço ao Prof. Jessé Carvalho Costa pelas contribuições com respeito às metodologias empregadas nesta tese bem como por fornecer alguns códigos de modelagem fundamentais para a composição do código de inversão sísmica.

Ao Prof. Cícero Régis por fornecer o código de modelagem MT utilizado na construção do código de inversão.

Agradeço a UFPA, CAPES, PETROBRAS pelo apoio financeiro.

RESUMO

Apresentamos um estudo sobre a inversão conjunta de dados geofísicos com aplicação em sísmica (tomografia de tempo de trânsito), gravimetria e métodos eletromagnéticos (magnetotelúrico). Este trabalho contribui em três principais subproblemas, relacionados à inversão, com o desenvolvimento de três novas metodologias: i) Seleção do parâmetro de regularização, ii) Implementação do coeficiente de correlação cruzada como medidor de similaridade (vínculo estrutural) e iii) Cálculo das matrizes de resolução para o caso da inversão simultânea de dois métodos geofísicos. Verificamos que com o método proposto para a seleção do parâmetro de regularização é possível obter soluções com o máximo de resolução mantendo-as ao mesmo tempo estáveis e ajustando os dados dentro da precisão do erro experimental. As soluções obtidas através da inversão conjunta usando o coeficiente de correlação como vínculo estrutural mostraram que este é uma alternativa viável a outros tipos de vínculos como o *cross-gradient* e vínculos petrofísicos. Por fim obtivemos expressões para o cálculo das matrizes de resolução no contexto da inversão conjunta estendendo assim os resultados existentes que são limitados à inversão de apenas um conjunto de observações geofísicas.

Palavras-chave: Inversão conjunta. vínculos estruturais. Resolução. regularização.

ABSTRACT

We present a study about the joint inversion of geophysical data with application to seismic, gravity and electromagnetic methods. This work contributes on three related partial problems with the development of three new methodologies: i) Selection of an optimal regularization parameter, ii) Use of the correlation coefficient as structural constraint measuring the similarity between the estimated physical properties, and iii) expressions for the resolution matrices for the particular case of joint inversion. We concluded from many numerical experiments that the proposed method for the selection of the regularization parameter makes possible the estimation of solutions with the maximum resolution allowed by the data keeping it at the same time stable and producing accepted data misfits. The solutions obtained by using the correlation coefficient as a structural constraint show that it is an efficient alternative to other joint constraints, e.g. the *cross-gradient* and petrophysical relationships. Finally, we obtained new expressions for the construction of the resolution matrices in the case of joint inversion, extending the available methodologies restricted to inversion of data sets from a single geophysical method.

Keywords: Joint inversion. structural constraints. Resolution. regularization.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO GERAL	1
2	ESTIMAÇÃO ROBUSTA E INTERATIVA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO	6
2.1	Introdução	6
2.2	Metodologia	12
2.3	Resultados	17
2.3.1	Gravimetria.....	17
2.3.2	Sísmica.....	24
2.3.3	Magnetotelúrico.....	29
2.4	Analisando a aplicabilidade a dados reais	34
2.5	Conclusões	36
3	INVERSÃO CONJUNTA	38
3.1	Introdução	38
3.2	Metodologia	39
3.3	Testes numéricos	44
3.3.1	Inversão conjunta sísmica-gravimetria.....	46
3.3.2	Inversão conjunta sísmica-MT.....	59
3.3.3	Inversão conjunta sísmica-MT-gravimetria.....	70
3.4	Conclusões	77
4	MATRIZ DE RESOLUÇÃO	78
4.1	Introdução	78
4.2	Metodologia	80
4.3	Testes numéricos	84
4.3.1	Inversão conjunta sísmica-gravimetria.....	86
4.3.2	Inversão conjunta sísmica-MT.....	89

4.4	Conclusões	92
5	CONCLUSÕES GERAIS.....	93
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICE	100
	APÊNDICE A - APROXIMAÇÃO DE GAUSS-NEWTON NA INVERSÃO	
	CONJUNTA	101

1 INTRODUÇÃO GERAL

A interpretação geofísica é reconhecidamente um problema mal-posto, o que significa que o intérprete está sempre interessado em obter mais informação sobre as fontes causadoras da resposta geofísica do que aquela contida nos dados (Silva et al., 2001). Tradicionalmente, o intérprete transforma o problema geofísico mal-posto em um problema bem posto através de operadores de regularização (e.g. Tikhonov e Arsenin, 1977) que minimizam, além do desajuste dos dados, um funcional estabilizador. A minimização de um funcional estabilizador força a solução a incorporar uma determinada propriedade físico-geométrica. Assim, para que a solução faça sentido, a propriedade incorporada através do funcional estabilizador deve ser um atributo geológico real da fonte anômala. Esta é uma condição incomum na prática já que atributos geológicos são, via de regra, extremamente complexos para serem expressos através de funcionais matemáticos.

Neste caso, ao invés de adicionar informação a priori sobre as fontes causadoras, o intérprete pode reduzir a sua demanda de informação sobre as fontes. É comum que esta redução da demanda de informação seja formulada através da imposição de uma perda deliberada de resolução em troca de um aumento na estabilidade da solução (Parker, 1977; Jackson, 1972). Este procedimento é implementado através do funcional de suavização espacial dado por $\mathbf{p}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}$, sendo \mathbf{D} a versão discretizada do operador de primeira derivada espacial do vetor \mathbf{p} contendo parâmetros que definem, de modo único, o modelo interpretativo adotado.

Além da introdução de informação geológica a priori e da redução da resolução, o intérprete pode também incorporar informação geofísica na forma de uma interpretação conjunta de dados oriundos de diversos métodos geofísicos. Nettleton (1976) chamou a atenção para o sinergismo potencial, inerente às interpretações geofísicas envolvendo mais de um método geofísico, ou seja, o fato de uma interpretação empregando vários métodos geofísicos produzir resultados superiores à soma dos resultados produzidos pela interpretação de cada

conjunto de dados separadamente. Abordagens integradas de diversos métodos geofísicos têm sido recomendadas por vários autores (Sill et al., 1977; Bahr, 1983; Stanica & Stanica, 1993; Wang et al., 1993; Oldenburg et al., 1994; Hering et al., 1995).

No entanto, apesar da simplicidade do conceito e das reconhecidas vantagens, a interpretação conjunta de dados geofísicos não é uma tarefa trivial e apresenta algumas dificuldades fundamentais abaixo relacionadas. Primeiro, diferentes observações apresentam diferentes unidades. O fato de observações oriundas de diferentes métodos serem expressas em unidades diferentes faz com que os valores numéricos destas observações possam ser muito diferentes. Neste caso, os conjuntos de observações com os maiores valores numéricos dominarão a interpretação, de modo que a contribuição de observações que são expressas por pequenos valores numéricos será inócua. Este problema tem sido reconhecido por diversos autores (Lines et al., 1988; Hou et al., 2006; Pilkington, 2006; Lelièvre et al., 2012)

Segundo, há a necessidade de se introduzirem parâmetros comuns aos grupos de métodos. Desde as primeiras interpretações conjuntas, os geofísicos reconheceram a necessidade de formulá-las na forma de um problema inverso em que todos os parâmetros a serem estimados, ou pelo menos subgrupos deles, devem ser comuns a todos ou a alguns grupos de métodos geofísicos. Se não houver parâmetros comuns, a interpretação conjunta não será melhor que as interpretações realizadas com cada conjunto de dados separadamente (Golizdra, 1980). Existem, essencialmente dois modos de se estabelecerem relações entre parâmetros, que sejam oriundas de informação geológica: vínculos petrofísicos e vínculos estruturais.

No caso de vínculos petrofísicos o intérprete presume que todos os parâmetros associados a cada método geofísico sejam expressos em termos de parâmetros petrofísicos através de relações empíricas como a Lei de Archie (Archie, 1942) que relaciona resistividade com porosidade e as equações de Gassman (Gassman, 1951) que relacionam velocidade sísmica e densidade à porosidade e saturação de fluidos (Hoversten et al., 2006; Abubakar et al., 2012;

Gao et al., 2012). Desse modo, a porosidade e a saturação de fluidos serão os parâmetros comuns aos diversos métodos e os únicos a serem determinados.

Alternativamente, os vínculos petrográficos podem ser expressos através de uma função densidade de probabilidade a priori em uma formulação Bayesiana (Hou et al., 2006; Chen e Hoversten, 2012; Jardani e Revil, 2009) ou através de uma solução de referência (Gallardo & Meju, 2004), possibilitando, em ambos os casos, introduzir informações a priori específicas sobre a área de estudos, tais como informações advindas de perfilação de poços próximos.

No caso dos vínculos estruturais, as distribuições espaciais das propriedades físicas estimadas conjuntamente são forçadas a representar geometrias próximas entre si. Estes vínculos podem ser introduzidos através: da suavidade entre estimativas de parâmetros obtidas por diferentes conjuntos de dados (Colombo e De Stefano, 2007), do operador Laplaciano (Haber e Oldenburg, 1997), do *cross-gradient* (Fregoso e Gallardo, 2009; Gallardo e Meju, 2004; Abubakar et al., 2012), do múltiplo *cross-gradient*, no caso de mais de dois conjuntos de métodos geofísicos (Gallardo, 2007), ou do determinante da matriz de Gram (Zhdanov et al., 2012).

Finalmente, é preciso avaliar a efetividade da interpretação conjunta. A avaliação do poder da interpretação conjunta na redução da ambigüidade da interpretação geofísica raramente é realizada com rigor. Apenas os trabalhos que usam a formulação Bayesiana (Hou et al., 2006; Chen & Hoversten, 2012; Jardani & Revil, 2009, por exemplo) dispõem de ferramentas para uma análise rigorosa de ambigüidade, mas as premissas estatísticas embutidas nessa formulação são muito restritivas e podem não ser válidas na prática, levando assim a resultados distorcidos. Alguns autores sequer fazem essa análise (Gallardo-Delgado et al., 2003), enquanto outros apenas analisam se a solução obtida contribui para melhor localizar o alvo (Harinarayana, 1999) ou se ela detecta feições conhecidas de alvos reais (Harinarayana, 1999; Roy et al., 2005; Abubakar et al., 2011; Gallardo & Meju, 2004; Gallardo, 2007; De

Stefano et al., 2011). A grande maioria dos autores, no entanto, compara a solução obtida com o alvo correto, usando dados sintéticos (Colombo & Stefano, 2007; Santos & El-Kaliouby, 2011; Fregoso & Gallardo, 2009; Pilkington, 2006; Hoversten et al., 2006; De Stefano et al., 2011; Abubakar et al., 2012; Haber & Oldenburg, 1997; Abubakar et al., 2011; Gallardo & Meju, 2004; Gao et al., 2012; Krahenbuhl & Li, 2012; Hu et al., 2009; Sasaki, 1989).

Nesta tese, o medidor da qualidade de uma inversão conjunta será a resolução associada a cada parâmetro estimado no processo inverso. Cada parâmetro é o valor da propriedade física estimada em cada célula de uma malha discretizadora da subsuperfície e a sua resolução será aproximada pelo elemento diagonal da matriz de resolução. Desse modo, um mapa espacial da resolução pode ser produzido, o que facilita a comparação entre as qualidades das inversões isolada e conjunta.

Os vínculos petrofísicos permitem estabelecer uma relação linear entre cada parâmetro do método A com o parâmetro do método B, ambos situados na mesma posição espacial. Esta simplicidade permite simplificar enormemente o cálculo da matriz de resolução da inversão conjunta. No entanto, as informações sobre as relações petrofísicas, obtidas em geral em logs de furos de sondagem ou de coleta pontual de amostras, comprometem a validade das conclusões para toda a área de estudo.

Por outro lado, os vínculos estruturais, impondo apenas uma similaridade aproximada entre as soluções referentes a cada método geofísico, por toda a área de estudo, apresentam um maior grau de confiança na incorporação de informações geológicas abrangentes. Infelizmente, o desenvolvimento teórico da matriz de resolução para este tipo de vínculo é bastante complexa e ainda não completamente entendida.

Não é do conhecimento do autor qualquer contribuição científica publicada que apresente uma medida de resolução para os resultados de uma inversão conjunta. Nesta tese,

apresentamos um método inédito para o cálculo da matriz de resolução associada a uma inversão conjunta com a utilização dos vínculos estruturais de correlação espacial.

Em qualquer que seja a abordagem para se estimar a matriz de resolução, os resultados serão fortemente dependentes da estimação judiciosa do parâmetro de regularização. Como nenhum dos métodos correntes de estimação deste parâmetro é adequado, desenvolvemos nesta tese uma nova abordagem robusta e confiável para estimar o parâmetro de regularização associado a qualquer problema inverso mal-posto.

Esta tese está estruturada da seguinte maneira. O primeiro capítulo aborda o desenvolvimento do novo método para estimar o parâmetro de regularização. O segundo capítulo apresenta o método de inversão conjunta com o emprego do coeficiente de correlação como vínculo estrutural. O terceiro capítulo apresenta o novo método para calcular a matriz de resolução em uma inversão conjunta.

Capítulo 2

ESTIMAÇÃO ROBUSTA E INTERATIVA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO

A inversão de um conjunto de N observações tem como objetivo a estimação dos elementos de um vetor de parâmetros M -dimensional \mathbf{p} o qual define de forma única um modelo interpretativo. Em Geofísica, a solução de um problema inverso é invariavelmente instável. Silva et al. (2001) mostrou que uma solução não única ou instável decorre de um desbalanceamento entre a informação contida no dado e a informação demandada pelo interprete. Neste caso, a estabilização da solução se torna absolutamente necessária e é usualmente implementada através da introdução de informação suplementar sobre \mathbf{p} . O método de regularização introduzido por Tikhonov no seu artigo seminal (Tikhonov, 1963), e publicado em Russo, tem sido um dos métodos mais comumente aplicados para encontrar soluções estáveis devido à sua simplicidade e robustez (no sentido de ser aplicável a uma grande classe de problemas). Apenas nos anos 70, entretanto, o seu método ganhou visibilidade mundial, provavelmente devido ao detalhado e claro livro sobre soluções de problemas inversos (Tikhonov & Arsenin, 1977) publicado em inglês no final da década de 70.

De forma simplificada, para o problema linear ou linearizado, e usando um número finito de observações e parâmetros dispostos respectivamente nos vetores \mathbf{d} e \mathbf{p} , o método de regularização de Tikhonov aplicado ao problema inverso geofísico linear associado com o problema direto $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{p}$, pode ser descrito como a minimização de um funcional $\tau = \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{p}\|_2^2 + \mu \varphi(\mathbf{p})$, em que \mathbf{A} é a matriz Jacobiana cujo ij -ésimo elemento é a derivada do funcional ajustante, f com respeito ao j -ésimo parâmetro, avaliada na i -ésima posição de observação. O funcional f produz a resposta geofísica do modelo interpretativo que deve ser especificado de modo único pelo conjunto de parâmetros dispostos no vetor M -dimensional \mathbf{p} . Os termos $\varphi(\mathbf{p})$ e μ são, respectivamente, um funcional quadrático estabilizador e um escalar estabelecendo o compromisso entre um ajuste aceitável dos dados e uma estabilidade aceitável da solução.

Tikhonov e Arsenin (1977) apresentaram quatro métodos para estimar μ . O mais importante afirma que μ deve ser selecionado da condição $\|\mathbf{d} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}(\mu)\|_2 \leq \delta$ em que δ é uma medida da acurácia dos dados a qual precisa ser conhecida a priori, e $\hat{\mathbf{p}}$ é uma estimativa de \mathbf{p} . Tikhonov and Arsenin (1977) argumentaram que a solução numérica deste problema em um computador é frequentemente difícil de ser obtida e sugeriram estimar μ da condição $\|\mathbf{d} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}(\mu)\|_2 = \delta$. Este critério se tornou conhecido como o Princípio da Discrepância de Morozov (Morozov, 1966) e ainda hoje é um dos mais amplamente aplicados (e.g., Li e Oldenburg, 2000; Portniaguine e Zhdanov, 2002; Zhdanov et al., 2000). Originalmente proposto para funcionais lineares contendo *termos de penalização* quadráticos, o Princípio da Discrepância de Morozov foi estendido para o caso de funcionais não lineares (Scherzer, 1993) e para uma grande classe de funcionais estabilizadores incluindo mas não limitado a termos de penalização quadráticos (Bonesky, 2009).

Parker (1994) e também Tikhonov e Arsenin (1977) propuseram estimar $\lambda = 1/\mu$ em um problema não linear pelo método dos multiplicadores de Lagrange não determinados. Para um valor constante fixo $\mu = \mu_1$, Parker (1994) resolve iterativamente o problema não linear através de um método de otimização padrão até que o Princípio da Discrepância seja satisfeito. Se este critério não puder ser satisfeito, um segundo valor $\mu_2 < \mu_1$ é atribuído a μ e o problema inverso não linear é resolvido a partir da mesma aproximação inicial. O processo é repetido até que o Princípio da Discrepância seja satisfeito. Para evitar divergência, o valor inicial μ_1 é feito suficientemente grande (Zhdanov et al., 2000, por exemplo, sugere $\mu_1 = 10000$). Claramente, o Princípio da Discrepância chega a um valor “ótimo” $\hat{\mu}$ para o parâmetro de regularização consistindo do maior valor produzindo soluções que ajustam os dados de forma satisfatória. No entanto, qualquer solução obtida com $\mu < \hat{\mu}$ também ajustará os dados, e terá maior resolução que aquela obtida com $\hat{\mu}$. Assim, o Princípio da Discrepância, como é usualmente aplicado, chega apenas a soluções “sub-ótimas”.

Haber e Oldenburg (2000) mencionam que a principal dificuldade desta abordagem é a necessidade de resolver um novo problema não linear para cada valor tentativo de μ (ou λ) o que o torna um procedimento com alto custo computacional. Para amenizar esta dificuldade, Constable et al. (1987) propuseram combinar o parâmetro de Marquardt (que estabiliza a correção do parâmetro) com o parâmetro de regularização μ (que estabiliza os próprios parâmetros) em um único parâmetro β e realizar uma busca de linha para minimizar o desajuste dos dados. Este procedimento tem sido largamente utilizado ainda que Silva (2001) tenham reportado que a mistura do parâmetro de Marquardt e do parâmetro de regularização pode prejudicar a convergência e conduzir a soluções muito distantes da solução desejada.

Ao longo dos últimos 30 anos certamente centenas de critérios tem sido propostos para estimar μ , todos fortemente baseados em conceitos estatísticos ou matemáticos. O critério estatístico, por exemplo, não fornece uma medida para a instabilidade da solução (e.g. Golub et al., 1979; Mead, e Hammerquist, 2013; Constable et al., 1987; deGroot-Hedlin e Constable, 1990; Uchida, 1993; Mitsuhata et al., 2002; Parker, 1994). Eles encontram um valor ótimo para o parâmetro de regularização analisando apenas as observações, como é o caso do amplamente empregado método da *Generalized Cross-Validation*.

Entre os critérios matemáticos, o mais amplamente empregado tem sido a curva- L (Hansen, 2001) que introduz a análise da estabilidade apenas de modo heurístico e indireto através da norma do vetor-solução. Entretanto, a correlação entre a norma da solução e a estabilidade da solução não é válida como demonstrado adiante através de um contra-exemplo. Além do mais, várias limitações no uso do critério da curva- L têm sido publicadas: Vogel (1996) reporta falta de convergência para certas classes de problemas. Hanke (1996) indica que o parâmetro de regularização cai muito rapidamente quando a razão ruído-sinal no dado se torna muito próxima de zero, de modo que as estimativas não convergem para a solução verdadeira. Hansen (2001) alerta para as limitações do critério da curva- L quando a solução exata é muito suave. Finalmente, Xu et al. (2016) relata a existência de um canto adicional na curva além do ‘canto global’.

Adicionalmente às dificuldades mencionadas acima, virtualmente todos os métodos que estimam μ em um problema não linear usam a aproximação linear em cada iteração de um método Gauss-Newton ou outro método similar. Neste caso, o parâmetro μ é usado para controlar não apenas a estabilização do parâmetro, mas também a estabilização da correção do parâmetro em cada iteração. Este procedimento não faz sentido (Silva et al., 2001) e não apresenta garantia de convergência (Haber and Oldenburg, 2000). Ainda assim, este

procedimento se tornou altamente popular e é amplamente aplicado em combinação com o Princípio da Discrepância (Jagannath e Yalavarthy, 2012), com o método *Generalized Cross-Validation* (Jagannath and Yalavarthy, 2012; Vatankhah et al., 2014), e com o critério da curva- L (Vatankhah et al., 2014; Doicu et al., 2002).

A única razão para resolver um problema inverso através de um operador inverso regularizado é que a descontinuidade do operador inverso não regularizado pode levar a soluções instáveis. A causa física da instabilidade da solução é o fato de o intérprete demandar mais informação além da que pode ser extraída das observações (Silva et al., 2001). Assim, se a informação desejada está contida nos dados, não haverá necessidade de regularização; caso contrário, um parâmetro de regularização ótimo precisa ser escolhido de tal forma a fornecer a quantidade *exata* de informação que falta nos dados a fim de satisfazer a demanda do intérprete. Em outras palavras, o parâmetro de regularização deve ser o menor que produza uma solução estável. Um valor menor levará a uma solução instável enquanto que um valor maior irá degradar a resolução desnecessariamente. Desta forma, qualquer escolha judiciosa do parâmetro de regularização *precisa* incluir um critério para determinar se uma solução particular é estável ou não.

Infelizmente, não é uma tarefa trivial estabelecer tal critério objetivo porque instabilidade é altamente dependente dos interesses e objetivos do intérprete. Por exemplo, uma solução contendo oscilações espaciais (provocadas pela presença de ruído) com pequeno comprimento de onda e pequenas amplitudes pode ser considerada estável se o objetivo do intérprete é apenas *detectar* e *localizar* (mas não *delinear*) ondulações na solução mostrando grandes amplitudes e grandes comprimentos de onda. Esta mesma solução, por outro lado, pode ser interpretada como instável se o comprimento de onda das oscilações coincidir com as dimensões das feições que o intérprete deseja *delinear*.

Shimelevich et al. (2013) mostrou que, embora alguns problemas possam ter soluções teoricamente estáveis, tentativas de extrair um grau de detalhe na parametrização do meio, que não é compatível com o nível de ruído, pode levar a uma instabilidade prática. Eles propuseram estimar o grau de instabilidade prática através da geração de perturbações aleatórias dos parâmetros do modelo interpretativo e em seguida computar a correspondente resposta geofísica. A máxima perturbação dos parâmetros, que produz uma resposta geofísica abaixo do nível de ruído nos dados, mede a menor extensão da fonte que pode ser recuperada pelo conjunto de dados com o nível de ruído e a parametrização do modelo interpretativo presumidos.

Bube and Langan (2008) estimam o parâmetro de regularização começando o problema inverso não linear com um alto valor para o parâmetro de regularização que é mantido fixo até a convergência. Então o valor do parâmetro de regularização é reduzido e o processo é repetido até que alguns critérios de detecção da transição entre solução estável e solução instável sejam satisfeitos. Bube and Langan (2008) apresentam diversos critérios alternativos para interromper o processo, o que reflete a dificuldade de definir instabilidade de maneira objetiva.

Para superar alguns dos obstáculos apontados, propomos um método robusto para selecionar o melhor parâmetro de regularização e que leva em conta as dificuldades da caracterização da instabilidade. Introduzimos uma medida quantitativa de instabilidade baseada na perturbação dos dados observados com J seqüências de realizações de ruído pseudo-aleatório as quais são invertidas para vários valores (μ_i) do parâmetro de regularização μ . Então, associamos com cada valor μ_i a máxima dispersão ρ_i das J soluções regularizadas com μ_i .

O intérprete identifica na curva $\rho_i \times \mu_i$ o valor μ^c associado com a máxima curvatura de ρ relativa a μ . Então ele inspeciona visualmente as soluções associadas com os valores de μ iguais ou maiores que μ^c , buscando, particularmente, o trio contíguo de valores de μ que

detectam a transição entre soluções instáveis e estáveis de acordo com o propósito do intérprete. Nós ilustramos a robustez e a confiabilidade da abordagem proposta em dados sintéticos de gravimetria, sísmica e magnetotelúrico.

2.2 METODOLOGIA

Presumimos que o vetor N -dimensional \mathbf{d} contém um conjunto de observações geofísicas que são produzidas por distribuições físicas contínuas na subsuperfície. Presumimos um modelo interpretativo que é descrito de modo único por um conjunto de M parâmetros dispostos em um vetor M -dimensional \mathbf{p} . Neste trabalho deixamos livre a relação entre M e N (M podendo ser menor, igual ou maior que N). Desta forma, as observações \mathbf{d} podem ser aproximadas pelo funcional $f(\mathbf{p})$ o qual pode ser linear ou não linear. Uma condição necessária para obter uma estimativa $\hat{\mathbf{p}}$ de \mathbf{d} é que o escalar

$$\Psi(\mathbf{p}) \equiv \|\mathbf{d} - f(\hat{\mathbf{p}})\|_2 \quad (1.1)$$

seja minimizado dentro do nível do ruído. A condição 1.1 é necessária mas não é suficiente porque o operador $f^{-1}(\mathbf{p})$ pode ser descontínuo, de tal forma que a solução $\hat{\mathbf{p}}$ pode ser instável, refletindo o fato de que não existe informação suficiente nos dados que correspondam à demanda do intérprete por informação. Neste caso, se faz usualmente necessária a introdução de informação adicional a priori, o que pode ser convenientemente feita através do método de regularização de Tikhonov. Esta informação suplementar sobre \mathbf{p} é introduzida através de um

funcional $\varphi(\mathbf{p})$ judiciosamente construído para atingir o seu mínimo quando a solução $\hat{\mathbf{p}}$ exibir a propriedade desejada. A solução regularizada é obtida por

$$\hat{\mathbf{p}} = \operatorname{argmin} \left(\tau \equiv \|\mathbf{d} - f(\mathbf{p})\|_2^2 + \mu \varphi(\mathbf{p}) \right). \quad (1.2)$$

Neste trabalho nós descartamos a situação na qual o intérprete emprega o método de regularização para introduzir deliberadamente um atributo específico na solução. Ao contrário, nós assumimos que a única razão do intérprete recorrer à regularização é para evitar instabilidade na solução. Neste caso, o funcional estabilizador mais simples e efetivo $\varphi(\mathbf{p})$ é o quadrado da norma- ℓ^2 de $\mathbf{D}\mathbf{p}$ dada por $\mathbf{p}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}$, em que \mathbf{D} é a versão discretizada do operador de derivada espacial de primeira ordem, de tal forma que a minimização de $\mathbf{p}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}$ impõe um grau de suavidade espacial a \mathbf{p} .

Sob esta premissa, o parâmetro de regularização ótimo é o menor valor μ^* que estabiliza a solução. Valores menores levarão a soluções instáveis e valores maiores irão degradar a resolução desnecessariamente e/ou produzir ajustes inaceitáveis dos dados. Se $\hat{\mathbf{p}}(\mu^*)$ levar a um ajuste inaceitável, então o nível de ruído é muito alto para permitir uma interpretação válida. Infelizmente, na prática, é impossível estimar os valores de μ^* de uma forma completamente objetiva e não tendenciosa porque instabilidade é uma condição altamente dependente do interesse e objetivo do intérprete como exposto anteriormente. Entretanto, a busca do intérprete poderia se tornar muito mais fácil se uma medida quantitativa de instabilidade, monotônica em μ , existir. Neste caso, um limite inferior μ^c poderá ser determinado automaticamente e, então, o intérprete saberá onde começar a busca. Apresentamos a seguir uma, entre várias possibilidades para levar a termo esta caracterização.

O método proposto

Primeiramente, definimos os extremos μ_A e μ_B de um intervalo adequado para μ de modo que $\hat{\mathbf{p}}(\mu_A)$ seja muito instável e $\hat{\mathbf{p}}(\mu_B)$ seja super-estabilizado. Para caracterizar uma solução muito instável, encontramos $\hat{\mathbf{p}}_1(\mathbf{d}_{r^1}, \mu_A)$, $\hat{\mathbf{p}}_2(\mathbf{d}_{r^2}, \mu_A)$ e $\hat{\mathbf{p}}_3(\mathbf{d}_{r^3}, \mu_A)$, usando a equação 1.2 com observações \mathbf{d} contaminadas com (pelo menos) três sequências r^1 , r^2 , e r^3 de ruído pseudoaleatório. Neste estágio consideramos estas três soluções como sendo muito instáveis se elas forem muito diferentes uma da outra de acordo com o discernimento do intérprete. Por outro lado, uma solução, $\hat{\mathbf{p}}_1(\mathbf{d}_{r^1}, \mu_B)$, por exemplo, é considerada super-estabilizada se ela produzir ajustes inaceitáveis aos dados.

Então, atribuímos L valores a μ entre μ_A e μ_B , e realizamos os seguintes passos:

1) Produzimos J sequências de N observações contaminadas com diferentes sequências \mathbf{r}^j de ruído pseudoaleatório: $\mathbf{d}^j = \mathbf{d} + \mathbf{r}^j$, $j = 1, \dots, J$, em que \mathbf{d} é, no momento, uma anomalia teórica sem ruído. Discutiremos posteriormente a validade do método proposto quando \mathbf{d} for uma observação real contaminada com ruído;

Então, para cada μ_k , $k = 1, \dots, L$, realizamos os seguintes passos:

2) Usando a equação 2 e as observações contaminadas, \mathbf{d}^j , obtemos J estimativas

$$\hat{\mathbf{p}}^j(\mu_k), j = 1, \dots, J;$$

3) Calculamos os vetores M -dimensional:

$$\Delta \mathbf{p}^{ji} \equiv \{\Delta p_l^{ji}\} = |\hat{p}_l^j - \hat{p}_l^i|, j = 1, \dots, J-1, i = j+1, \dots, J, l = 1, \dots, M, \text{ cujos elementos são os}$$

valores absolutos das diferenças, elemento a elemento, entre todos os possíveis pares dos J vetores-soluções estimados;

- 4) Para cada um dos vetores $\Delta \mathbf{p}^{ji}$ obtidos no passo 3, calculamos o escalar ρ^{ji} como o valor máximo entre os M elementos de $\Delta \mathbf{p}^{ji}$ ou subconjuntos destes elementos;
- 5) Definimos como uma medida quantitativa da instabilidade da solução, tentativamente estabilizada com μ_k , o escalar $\rho_k = \max_{j,i} \rho^{ji}$ o qual tomamos como uma medida da dispersão das soluções associada a um dado μ_k ;
- 6) Construimos o gráfico de ρ_k contra $\mu_k, k = 1, \dots, L$;
- 7) Determinamos o valor μ^c associado com a máxima curvatura de $\rho_k \times \mu_k$. Então, para cada $\mu_k > \mu^c$, comparamos visualmente as soluções $\hat{\mathbf{p}}^j(x, y, z)$ para alguns poucos valores de j . Nesta comparação, soluções obtidas com o vizinho à esquerda do atual μ_k (menor μ) devem apresentar sinais claros de instabilidade tais como características espúrias que aparecem quando soluções obtidas com diferentes sequências de ruído adicionadas aos dados são comparadas. Diferentemente, o vizinho à direita (maior μ) irá apresentar em geral a mesma imagem associada a μ_k , independentemente da sequência de ruído, exceto possivelmente, por uma discreta atenuação na amplitude causada por uma estabilização excessiva.

Os passos 4 e 5 objetivam detectar qualquer possível evidência de instabilidade, ou seja, é suficiente que uma dada sequência de ruído produza soluções muito distantes de qualquer outra para demonstrar que o processo inverso é mal-posto devido a instabilidade na solução. Por outro lado, estabilidade não pode ser rigorosamente demonstrada com um número finito de experimentos. Apesar disso, em um procedimento instável, a probabilidade que um conjunto de observações sem ruído e que foram contaminadas com J sequências de realizações de ruído produzam, ao acaso, J soluções estáveis decresce com a potência de J . Deste modo, através do

uso de um valor de J suficientemente grande, podemos ter uma grande confiança que um valor pequeno de ρ_k indicará uma solução estável.

O comportamento aproximado da curva $\rho_k \times \mu_k$ produzida no passo 6 pode ser antecipado. Para valores muito pequenos de μ_k , a dispersão da solução, ρ_k , irá decrescer rapidamente com μ_k enquanto que para valores muito grandes, a dispersão irá decrescer mais lentamente com μ_k e tenderá a um valor constante, tal que a curva $\rho_k \times \mu_k$ irá apresentar características monotônicas e uma forma hiperbólica aproximada. Desvios do comportamento monotônico podem ocorrer em duas situações. Primeiro, quando $\rho_k = \max_{j,i} \rho^{ji}$ é obtido com um número J de sequências pseudoaleatórias muito pequeno. Neste caso, ρ_k pode ser subestimado porque as sequências amostradas podem, por acaso, produzir soluções próximas uma das outras.

A segunda situação pode ocorrer quando as J soluções são obtidas através de um algoritmo de inversão não linear iterativo (no caso de um problema não linear) e cujo critério de parada seja baseado apenas no ajuste dos dados. Neste caso, um ajuste aceitável pode ocorrer antes da informação a priori do estabilizador ter sido completamente incorporada em uma ou mais soluções, $\hat{\mathbf{p}}^j, j=1, \dots, J$, obtidas no passo 2.

Finalmente, fazendo o gráfico do desajuste dos dados contra $\mu_k, k=1, \dots, L$, e nomeando o valor máximo permitido para o desajuste como ε^\dagger , será possível estimar o limite superior para o parâmetro de regularização, como o valor μ^\dagger associado a ε^\dagger .

2.3 RESULTADOS

Nesta seção ilustramos a robustez do método proposto na estimação do parâmetro de regularização. Seleccionamos três conjuntos de dados sintéticos de três métodos geofísicos (gravimetria, sísmica e magnetotelúrico) e usamos para os dados gravimétricos um modelo interpretativo bem diferente daqueles empregados para os dados de sísmica e magnetotelúrico.

2.3.1 GRAVIMETRIA

A Figura 2.1a mostra uma anomalia gravimétrica teórica, sem ruído produzida pela topografia do embasamento de uma bacia sedimentar 2D simulada (Figura 2.1b) exibindo um contraste de densidade constante de -0.3 g/cm^3 entre os sedimentos e o embasamento. Com observações sintéticas foram produzidas sobre a superfície da bacia em estações distantes entre si de 0.5 km ao longo da direção do perfil. A Figura 2.2 ilustra o modelo interpretativo consistindo de prismas retangulares justapostos 2-D com topo na superfície e espessuras correspondendo aos parâmetros p_j a serem determinados a partir do conjunto de observações. Os dados foram contaminados com 25 sequências de ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0.1 mGal (Passo 1 na seção metodologia).

Estes 25 conjuntos de dados contaminados com ruído foram invertidos usando o método de Gauss-Newton (apenas neste teste em particular) com a estratégia de Marquardt (1963) empregando, no funcional estabilizador, o operador de suavidade para vários valores de μ no intervalo $[0.1, 10]$ (Passo 2 na seção metodologia). Finalmente, seguimos os passos 3-7 da

seção metodologia. Na Figura 2.3 mostramos duas curvas, a curva da medida de instabilidade $\rho_k \times \mu_k$, e a curva de rms médio do ajuste dos dados sobre as 25 soluções. As unidades desta última curva estão referidas ao eixo vertical à direita nesta figura. A primeira curva (linha cheia) leva em conta todos os M elementos do modelo interpretativo para calcular os vetores $\Delta \mathbf{p}^{ji}$ no passo 3 da seção metodologia, enquanto que a segunda curva (linha pontilhada) considera apenas os parâmetros associados com as coordenadas horizontais $x \in [10 \text{ km}, 90 \text{ km}]$, ou seja, nesta curva, as bordas da bacia são excluídas do conjunto $\Delta \mathbf{p}^{ji}$. O rms do ajuste dos dados na figura se refere à curva $\rho_k \times \mu_k$ que inclui apenas o fundo da bacia.

A razão para separar o conjunto de parâmetros em duas regiões é o fato de as incertezas nos parâmetros (espessuras dos prismas) serem medidas ao longo da direção vertical z , de tal forma que as espessuras dos prismas associados às bordas da bacia tenderão a apresentar maiores incertezas do que as espessuras associadas ao fundo da bacia. Desta forma, se o interesse do intérprete é delinear estruturas geológicas que podem servir como armadilhas para petróleo em uma bacia intracratônica tais como as elevações positivas E1 e E2 na Figura 2.1b, então, é mais conveniente analisar a curva que inclui apenas o fundo da bacia na Figura 2.3. Por outro lado, se o interprete estivesse procurando estruturas de falha em bacias *offshore*, a curva incluindo as bordas (ou incluindo apenas as bordas) poderia ser mais adequada. A dicotomia acima exemplifica a fragilidade do estabelecimento de um procedimento universal e completamente objetivo para estimar o parâmetro de regularização, baseado apenas em critérios matemáticos ou estatísticos que desconsideram os objetivos do intérprete e o ambiente geológico sendo estudado.

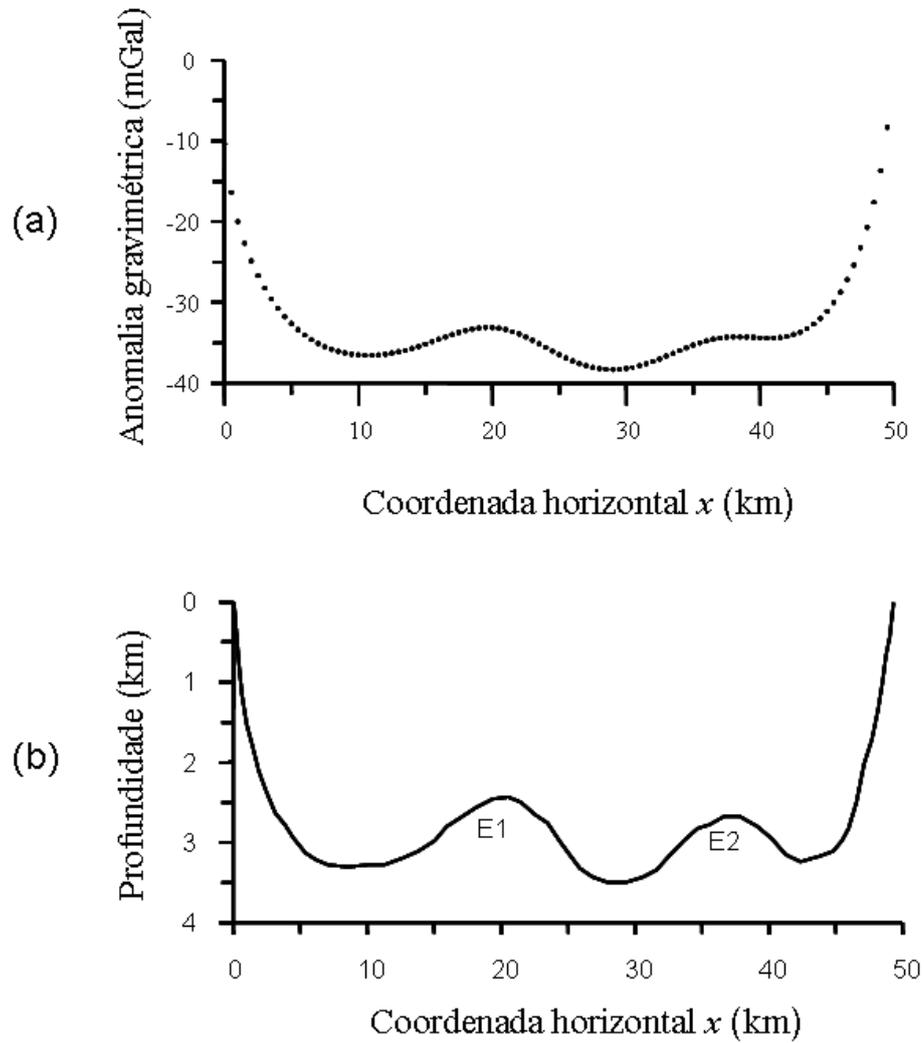


Figura 2.1: Anomalia gravimétrica (a) produzida pela topografia do embasamento (b).

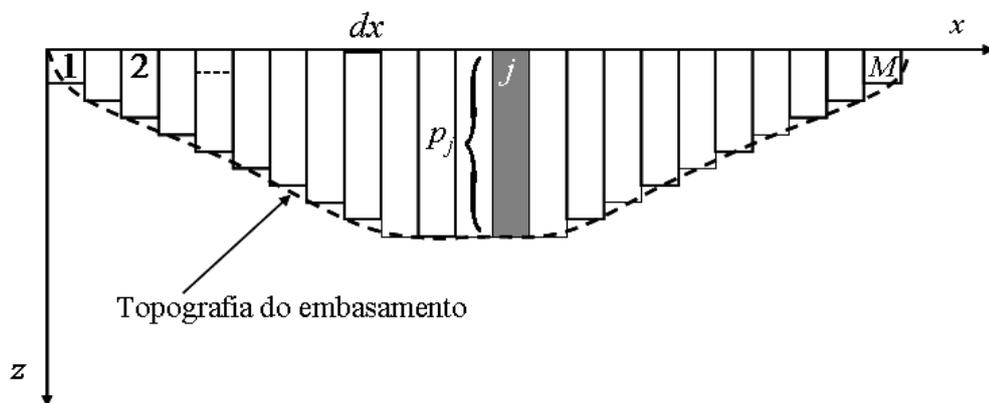


Figura 2.2: Modelo interpretativo empregado nos experimentos de inversão gravimétrica.

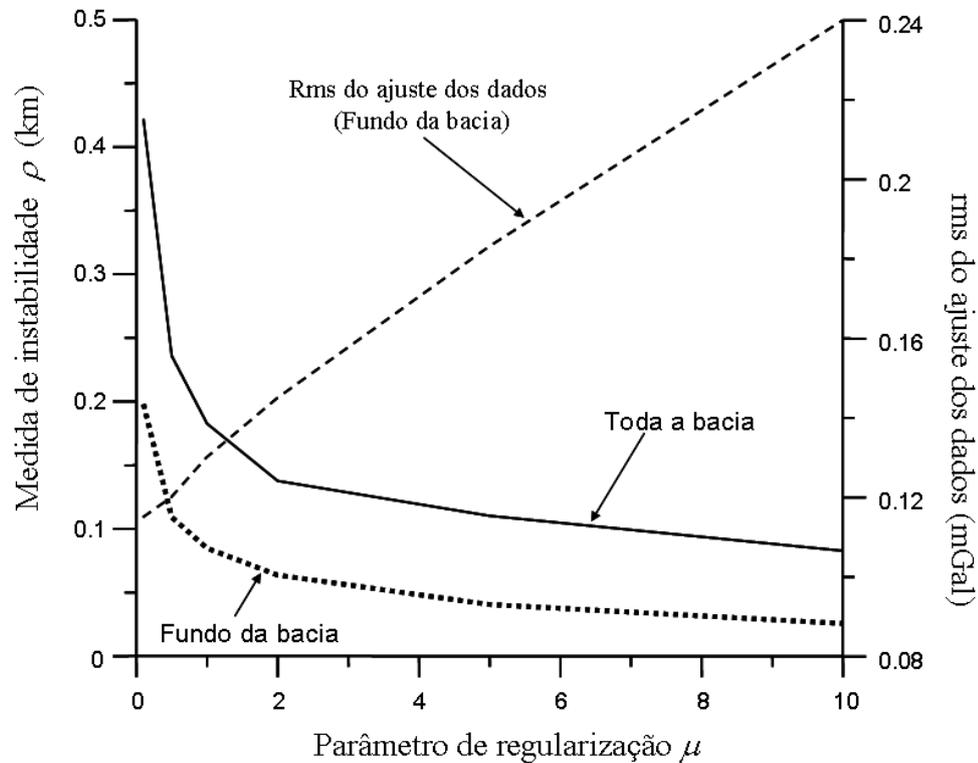


Figura 2.3: Gráficos para medida de instabilidade em função do parâmetro de regularização.

Como um exemplo concreto, suponhamos que o interprete queira delinear estruturas que tenham cerca de 10 km de largura e 1 km de espessura tais como as feições E1 e E2 na Figura 2.1b. Neste caso, o mais apropriado é analisar a curva que exclui as bordas. Seguindo a prescrição no passo 7 da metodologia, mostramos na Figura 2.4a-d todas as 25 soluções perturbadas para $\mu = 0.1, 2, 5, e 20$, respectivamente. Para $\mu = 0.1$ as soluções são claramente instáveis. Para $\mu = 2$ a instabilidade é drasticamente reduzida, mas existem ainda grandes e irregulares incertezas ao longo do perfil das soluções. Para $\mu = 5$ a instabilidade está bem controlada ao longo de todo o perfil da solução e produz um ajuste aceitável de 0.18 mGal. Finalmente, para $\mu = 20$, a dispersão da solução é uniformemente muito pequena ao longo de

todo o perfil, mas, infelizmente, o rms do ajuste (não mostrado na Figura 2.3) é inaceitável (0.34 mGal). Deste modo, $\mu^* = 5$ é tomado como a melhor estimativa do parâmetro de regularização uma vez que este é o menor valor para o parâmetro produzindo ao mesmo tempo soluções estáveis e ajustes aceitáveis.

Um limite superior para μ também pode ser estimado do gráfico $\rho_k \times \mu_k$. Presumindo, por exemplo, que o máximo desajuste aceitável dos dados é $\varepsilon^\dagger = 0.2$ mGal, e inserindo este valor na curva do rms da Figura 2.3, obtemos $\mu^\dagger = 6.6$ como o valor máximo permitido para μ . Enfatizamos que este valor máximo de μ deve ser aceito apenas se o intérprete deseja deliberadamente introduzir a informação geológica concreta que a solução é muito suave. Este valor não deve ser usado quando a única razão para o intérprete recorrer à regularização for o controle da instabilidade da solução na ausência de informação a priori sobre as fontes anômalas.

Adicionalmente, ilustramos a fonte potencial de erro referida no final da seção de metodologia, que está relacionada ao cálculo de um valor maior do que o esperado para ρ_k . A Figura 2.4e mostra um detalhe da área indicada pelo retângulo tracejado na Figura 2.4d. Este detalhe mostra as 25 soluções perturbadas obtidas com $\mu = 20$. Note que as soluções estão espacialmente distribuídas em dois grupos. O maior é formado por 23 soluções enquanto que apenas duas soluções compõem o grupo menor. A linha horizontal tracejada indica a geometria final associada a um vetor de parâmetros estabilizado com valores sucessivamente maiores do parâmetro de regularização, ou seja, a geometria para onde tendem as soluções estabilizadas com o funcional da suavidade (definido como o quadrado da norma ℓ^2 de \mathbf{Dp}) empregando valores muito grandes de μ_k . Esta tendência é indicada pelas setas na Figura 2.4e. Dessa forma, ao longo das iterações as soluções no grupo maior se moveram mais rapidamente em direção à linha tracejada em comparação com as outras duas soluções. Como a medida de instabilidade

ρ_k depende da distância máxima entre pares de soluções, o grupo de soluções na Figura 2.4e irá mostrar uma falsa medida de alta instabilidade. Para impedir que isto aconteça, basta permitir mais iterações no algoritmo de inversão, garantindo assim que grandes distâncias entre soluções sejam causadas exclusivamente pela presença da instabilidade.

Finalmente, comparamos nossa proposta de medida de instabilidade com o método da curva L . A falácia fundamental da curva L consiste em presumir implicitamente que a norma da solução seja uma medida da instabilidade da solução, ou que, no mínimo apresente uma grande correlação com ela. Para demonstrar esta falácia, apresentamos abaixo um contra-exemplo. A Figura 2.5a mostra a topografia verdadeira do embasamento usada nos testes anteriores (linha sólida) e uma solução fracamente estabilizada pelo funcional da suavidade (linha pontilhada). Note que a solução oscila em torno da topografia verdadeira. Maiores ou menores valores do parâmetro de regularização podem, respectivamente, diminuir ou aumentar as amplitudes das oscilações mas estas estarão sempre em torno da topografia verdadeira exceto quando a solução estiver super estabilizada. Consequentemente, para garantir um ajuste aceitável aos dados, as profundidades das soluções acima e abaixo da topografia verdadeira tenderão a se contrapor, produzindo aproximadamente a mesma norma para a solução, independentemente do parâmetro de regularização. A Figure 2.5b exhibe o comportamento desfigurado da curva L neste exemplo.

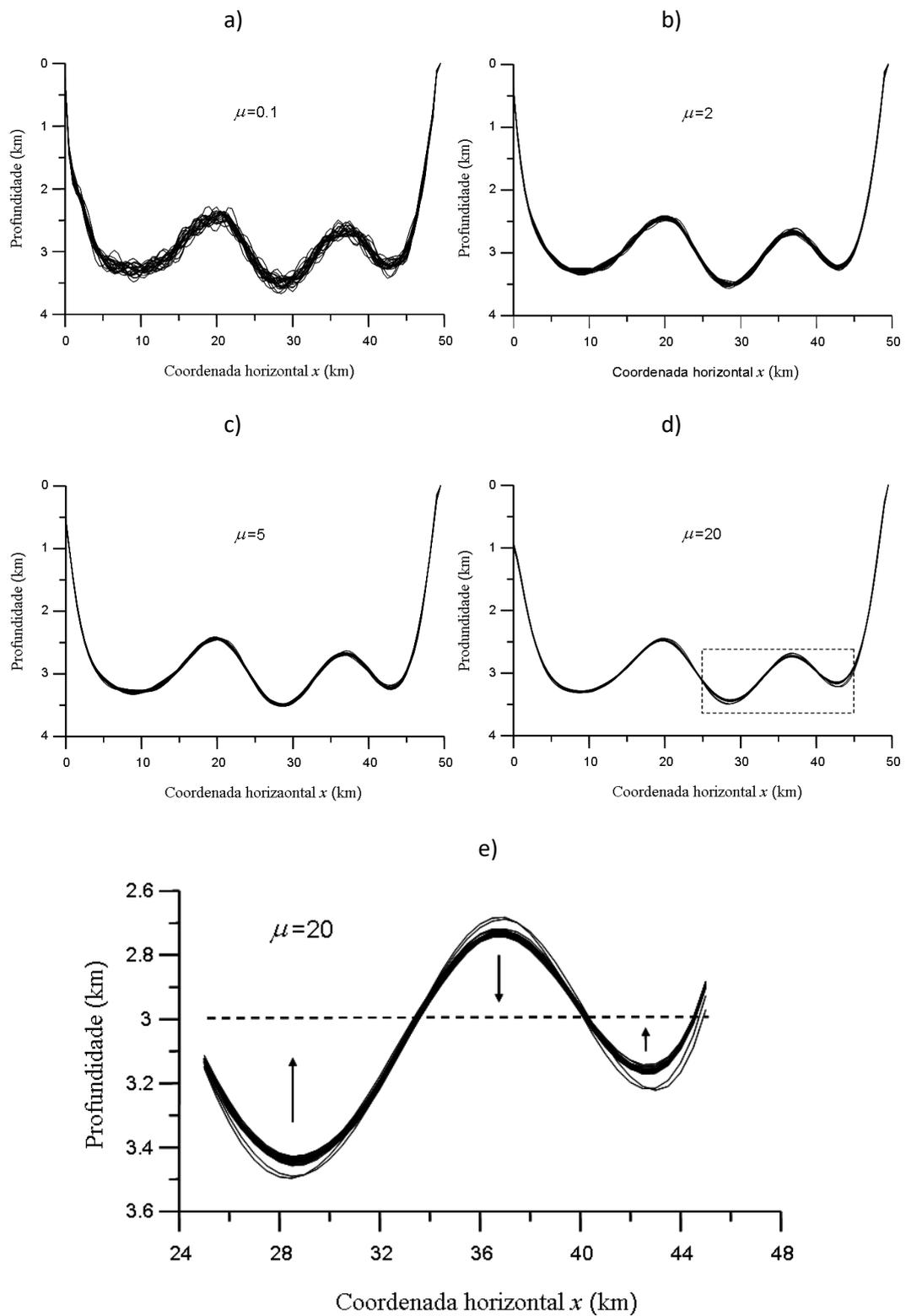


Figura 2.4: Soluções gravimétricas perturbadas para $\mu = 0.1$ (a), $\mu = 2$ (b), $\mu = 5$ (c), $\mu = 20$ (d). O detalhe mostrado em (e), cuja posição é mostrada em (d), exibe duas soluções anormalmente distante do grupo de 23 soluções como o resultado de uma convergência prematura.

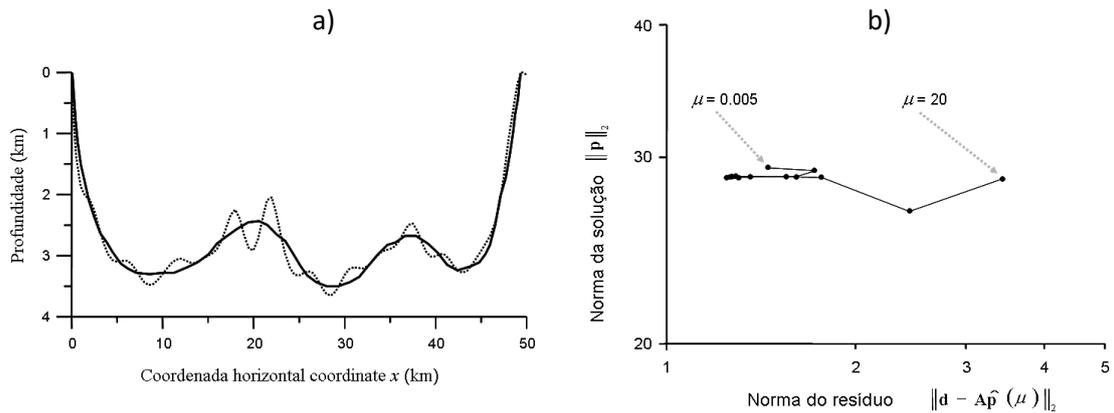


Figura 2.5: (a) Solução gravimétrica com estabilização pobre ($\mu = 0.1$) evidenciando a distribuição igualitária das profundidades estimadas (linha tracejada) em torno do relevo verdadeiro (linha sólida). (b) curva- L para valores de μ no intervalo $[0.005, 20]$.

2.3.2 SÍSMICA

A Figura 2.6a mostra uma distribuição sintética 2D de velocidade sísmica no plano x - z simulando a presença de um domo de sal homogêneo inserido em um pacote sedimentar o qual exibe uma variação de velocidade com a profundidade. Essa distribuição discreta de velocidade foi produzida em uma malha de 200×50 células com dimensões de $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ ao longo das direções x e z , respectivamente. As velocidades sísmicas são presumidas constantes dentro de cada célula, podendo, no entanto, variar de uma célula para outra. As observações sintéticas

de tempos de trânsito foram calculadas através da solução da equação eikonal usando diferenças finitas através do algoritmo Fast Marching (Sethian, 1999). Os raios correspondentes são calculados seguindo a direção oposta à do gradiente do tempo de trânsito a partir de cada posição do receptor.

A Figura 2.6b mostra, para uma única posição da fonte, as isócronas da frente de onda a em segundos (linhas pretas) e as trajetórias dos raios associados (linhas brancas). Nós postulamos um modelo interpretativo que coincide com a malha x - z que gerou as observações sintéticas. Primeiro, geramos 25 conjuntos de observações sintéticas contaminadas com ruído $\mathbf{d}^j = \mathbf{d} + \mathbf{r}^j, j = 1, \dots, 25$ (passo 1 na seção de metodologia) em que \mathbf{r} é um vetor de realizações de uma variável pseudoaleatória uniformemente distribuída entre -10 ms e 10 ms.

Em seguida estes 25 conjuntos de dados foram invertidos usando o método Spectral Projected Gradient (Birgin et al., 2000), empregando no funcional estabilizador o operador de suavidade, para valores de μ no intervalo $[2, 40]$, com espaçamento de 2 unidades (passo 2 da seção de metodologia). Finalmente, seguimos os passos 3-7 da seção de metodologia, usando no passo 4 todos os elementos do vetor $\Delta \mathbf{p}^{ji}$. A curva ρ_k contra μ_k é exibida na Figura 2.7. Note o comportamento aproximadamente hiperbólico previsto na seção metodologia. Para valores de μ igual ou menores do que 6, a Figura 2.7 indica uma grande dispersão entre as 25 soluções. Por outro lado, para valores de μ maiores do que 8, a curva tende a se tornar plana e aproximadamente horizontal, sugerindo que o aumento em μ além de 8 não irá produzir virtualmente qualquer aumento na estabilidade da solução.

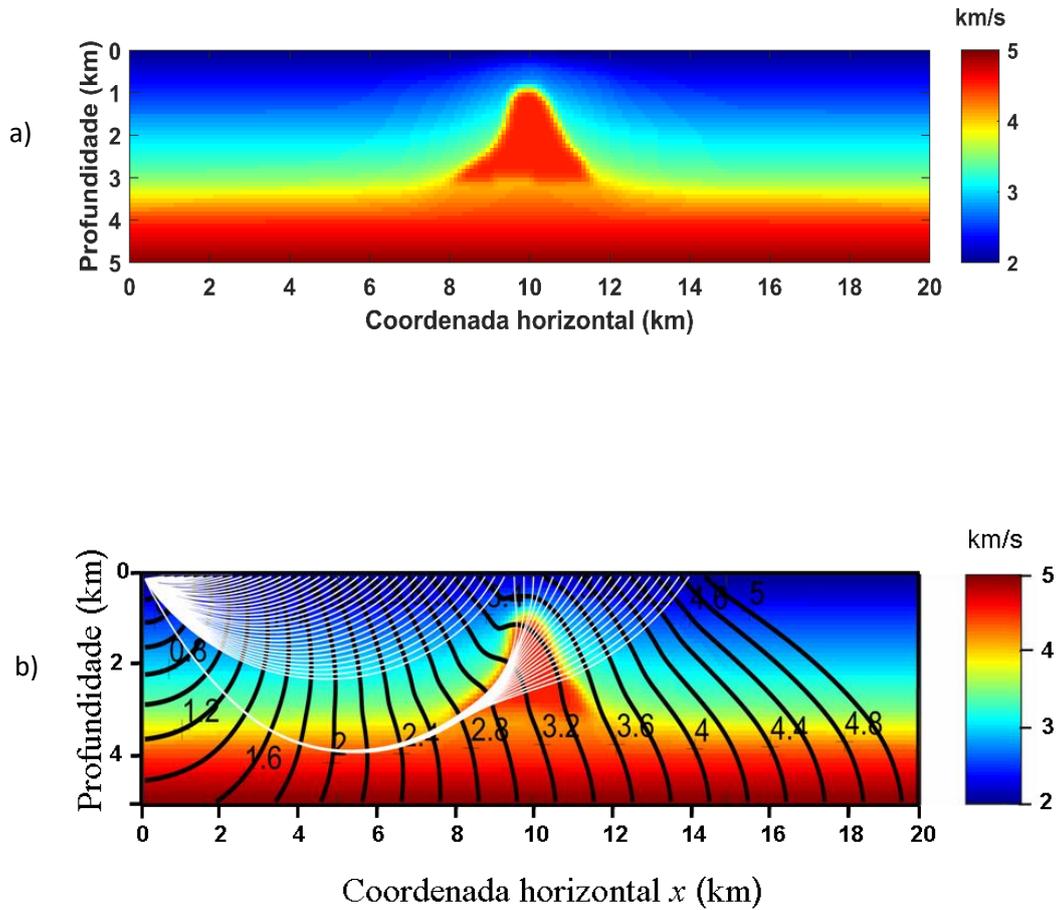


Figura 2.6: (a) Distribuição de velocidade sísmica num plano vertical interceptando um domo de sal simulado intrudindo sedimentos cujas velocidades aumentam com a profundidade. (b) Traçado de raios para um experimento sísmico.

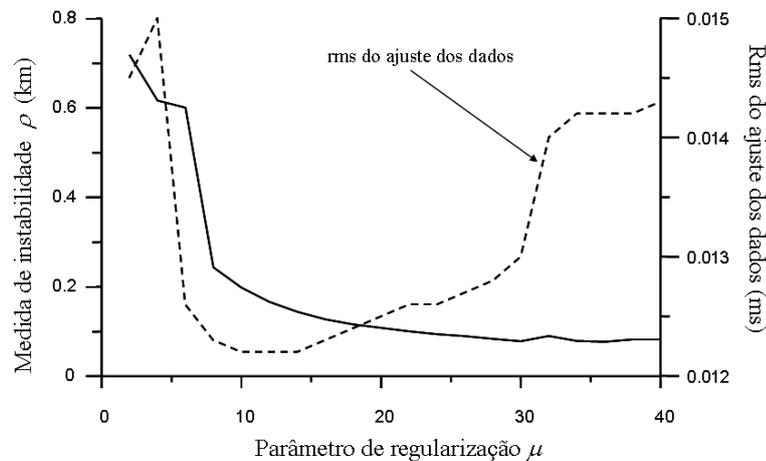


Figura 2.7: Dados sísmicos. Gráfico de $\rho_k \times \mu_k$ (linha sólida) e rms do ajuste dos dados (linha tracejada). A última se refere ao eixo vertical da direita.

Para confirmar a solidez do método proposto mostramos na Figura 2.8a-c as soluções obtidas, respectivamente, com $\mu_k=6$, 8, e 10 e a mesma sequência de ruído pseudoaleatório adicionada aos dados. A solução da Figure 8a ($\mu_k=6$) é claramente instável, exibindo várias características espúrias enquanto que a solução exibida na Figura 2.8b ($\mu_k=8$) parece estável. Esta estabilidade é confirmada pela solução mostrada na Figura 2.8c ($\mu_k=10$) a qual é muito próxima da solução obtida com $\mu_k=8$. Por outro lado, esta última foi obtida com um parâmetro de regularização desnecessariamente grande. A desnecessária degradação de resolução na Figure 8c pode não ser notada pela simples inspeção visual, mas está certamente presente. Adicionalmente, notamos na Figura 2.7 que todas as soluções obtidas com μ pertencentes ao intervalo $[2, 40]$ produzem rms do ajuste dos dados dentro da amplitude do ruído nos dados. Desta forma, a análise acima indica a escolha $\mu^* = 8$ como o parâmetro de regularização ótimo.

É necessário destacar que a instabilidade exibida na Figure 8a possui duas fontes distintas. Primeiro, existe a instabilidade causada pelo desbalanceamento entre a informação contida no dado e a informação demandada pelo interprete, que é o principal objeto deste capítulo. Segundo, existe a instabilidade causada pela deficiência do método de traçado de raio empregado no cálculo (de forma acurada) dos tempos de trânsito quando a distribuição de velocidade não é suficientemente suave. Por outro lado, no que importa ao presente método, não existe distinção entre os tipos de instabilidade uma vez que apenas o efeito global e não a origem das instabilidades é importante para a interpretação final.

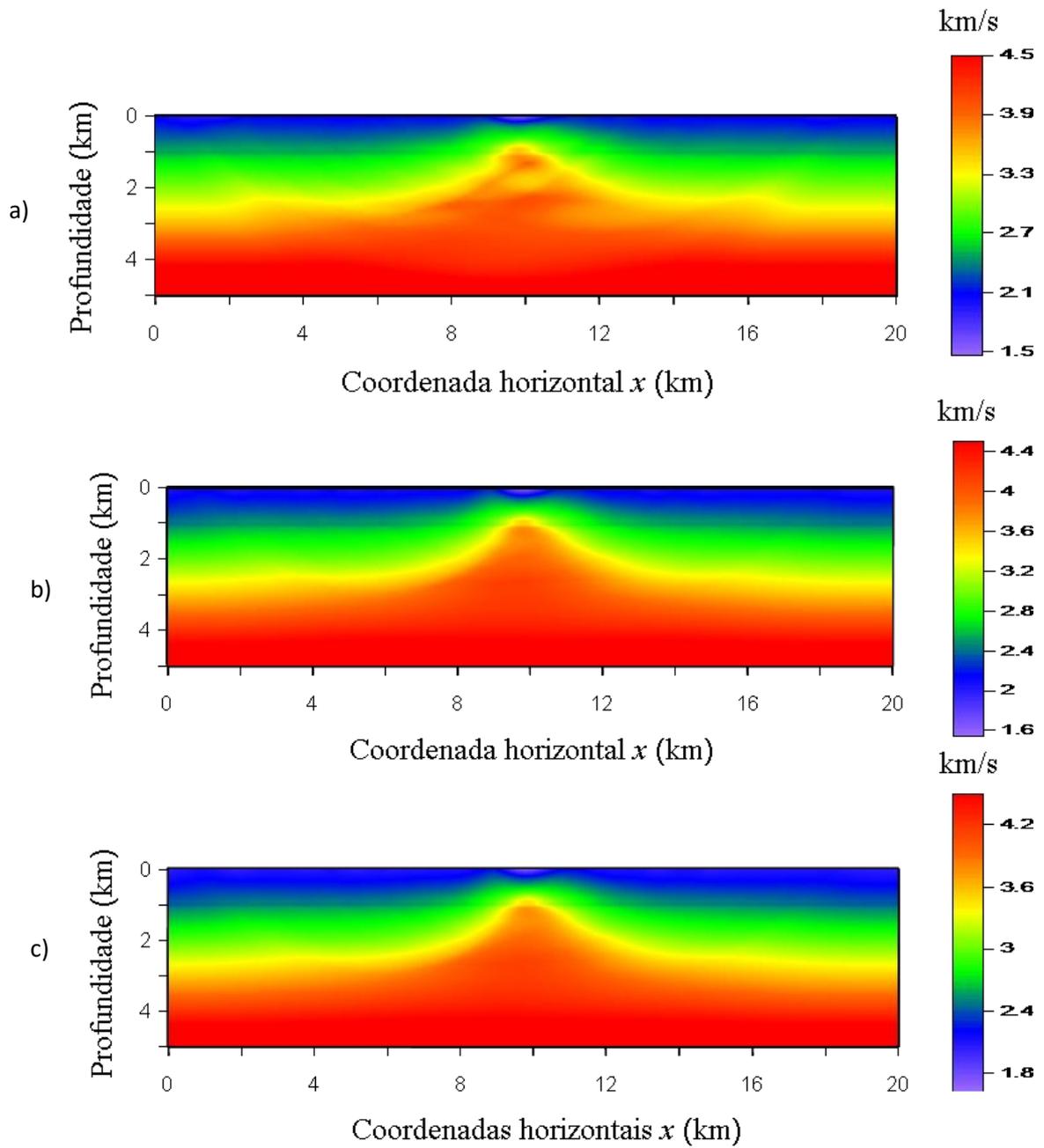


Figura 2.8: Soluções sísmicas estabilizadas com $\mu = 6$ (a), $\mu = 8$ (b), $\mu = 10$ (c).

2.3.3 MAGNETOTELÚRICO

A Figura 2.9 mostra uma distribuição de resistividade 2D sintética no plano x - z simulando a presença de um domo de sal inserido em um pacote sedimentar. Essa distribuição discreta de resistividade foi gerada em uma malha de 100×25 células com dimensões de 200 m \times 200 m ao longo das direções x e z , respectivamente. A resistividade é presumida ser constante dentro de cada célula mas podendo variar de uma célula para outra. Usamos o método de elementos finitos (Wannamaker et al., 1987) para produzir observações sintéticas consistindo de 40 estações localizadas em $z = 0$ e regularmente espaçadas no intervalo [0 km, 20 km]. Quatro frequências foram utilizadas: 0.0125 Hz, 0.0250 Hz, 0.05 Hz, e 0.1 Hz.

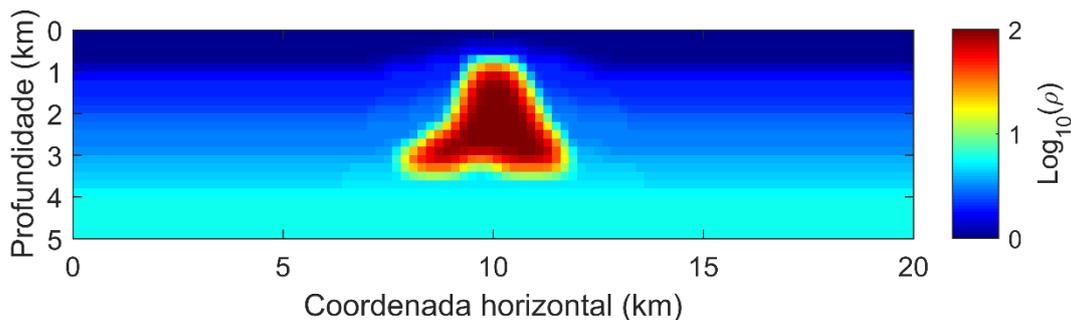


Figura 2.9: Distribuição de resistividade elétrica no plano vertical interceptando um domo de sal simulado penetrando os sedimentos cujas resistividades aumentam com a profundidade.

Postulamos um modelo interpretativo que coincide com a malha x - z que gerou as observações sintéticas. Primeiramente, calculamos 20 conjuntos de observações sintéticas, contaminadas com ruído $\mathbf{d}^j = \mathbf{d} + \mathbf{r}^j$, $j=1, \dots, 20$ (passo 1 na seção metodologia) em que \mathbf{r} é

um vetor de realizações pseudoaleatórias de média nula de uma distribuição uniforme com desvio padrão igual a 2.5 por cento dos valores das observações.

Estes 20 conjuntos de dados com ruído foram invertidos usando o método Spectral Projected Gradient (Birgin et al., 2000). As soluções foram estabilizadas com o funcional da suavidade para 13 valores de μ no intervalo $[0.005, 50]$. Finalmente, seguimos os passos 4-7 da seção metodologia, usando no passo 4 todos os elementos do vetor $\Delta \mathbf{p}^{ji}$. A curva ρ_k contra μ_k é exibida na Figura 2.10. Note o comportamento hiperbólico previsto na seção metodologia. Para valores de μ_k iguais ou menores do que 2 existe uma grande dispersão entre as 20 soluções. Por outro lado, para valores de μ_k maiores do que 4, a curva tende a um patamar indicando que o menor valor de μ_k que estabiliza a solução deve ser procurado à direita de $\mu = 4$.

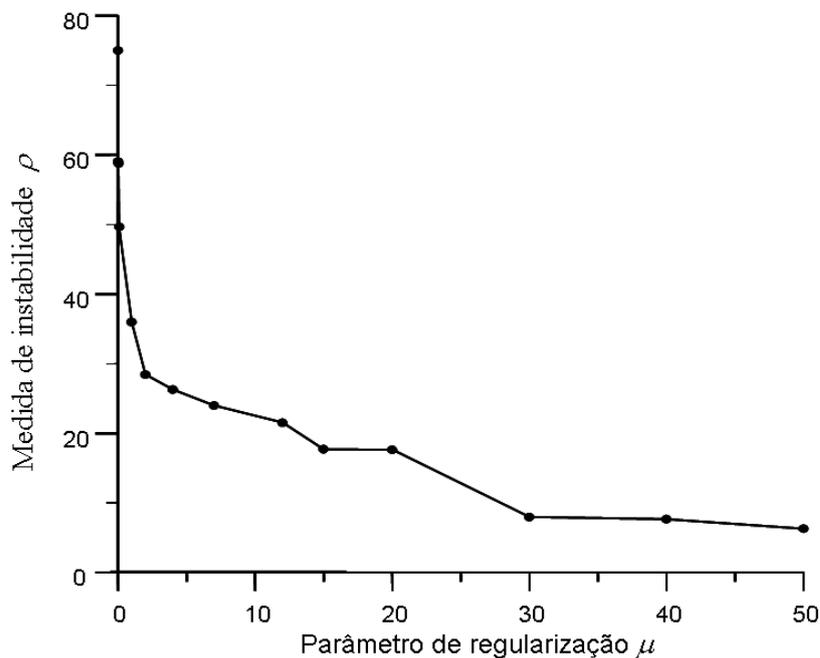


Figura 2.10: Dados magnetotelúricos. Gráfico $\rho_k \times \mu_k$

O resultado desta busca está sintetizado na Figura 2.11a-f que mostra as soluções para $\mu = 0.1, 2, 4, 15, 20$ e 30 , respectivamente. Incluímos os valores 0.1 e 2 apenas para

comparações. Para cada valor de μ mostramos soluções obtidas com três diferentes seqüências de ruído adicionadas às observações. Desprezando pequenas perturbações na região ocupada pelos sedimentos e, focando o interesse no formato do domo, concluímos que $\mu^* = 20$ é o menor valor que estabiliza a solução e, desta forma, é considerado a melhor estimativa para o valor do parâmetro de regularização. O rms do ajuste dos dados para a solução estabilizada com $\mu^* = 20$ é compatível com a amplitude do ruído nos dados. Alguns exemplos do ajuste dos dados para o valor selecionado de μ são exibidos na Figure 2.12.

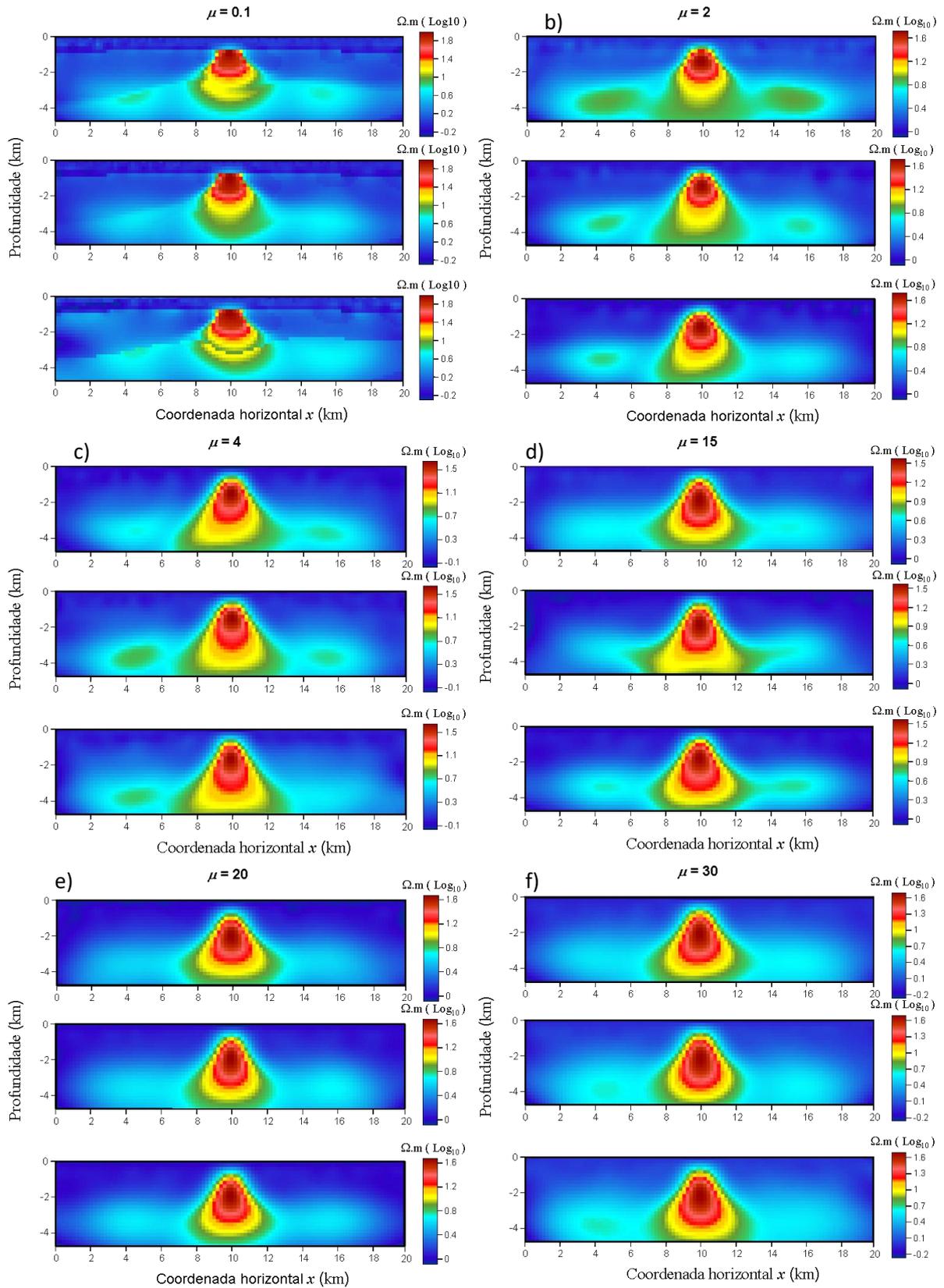


Figura 2.11: Várias soluções MT mostrando o efeito do parâmetro de regularização sobre a estabilidade da solução.

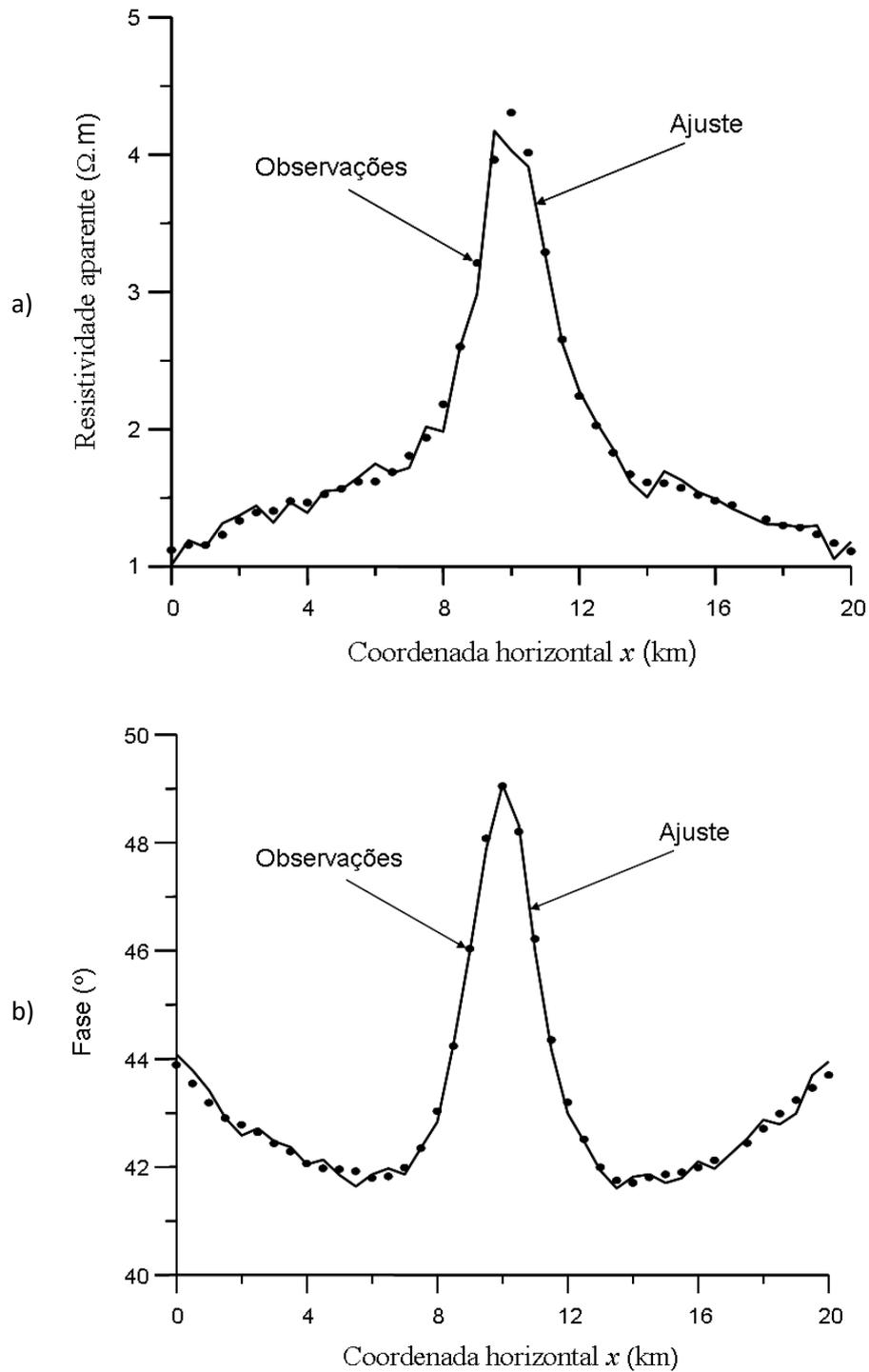


Figura 2.12: Ajuste do dado magnetotelúrico para a frequência de 0.1 Hz.

(a) Resistividade aparente. (b) Fase.

2.4 ANALISANDO A APLICABILIDADE A DADOS REAIS

Nesta análise da aplicabilidade do método proposto a dados reais, abordamos a validade de se estimar um valor ótimo para o parâmetro de regularização através da perturbação de dados reais com sequências pseudoaleatórias. Para simular uma situação real realizamos o seguinte experimento com observações sintéticas gravimétricas e sísmicas. Para simular o caso com dados reais, perturbamos as observações teóricas gravimétricas e sísmicas com uma única sequência de ruído pseudoaleatório. Então, perturbamos estas observações “reais” com 25 sequências diferentes de ruído aleatório como descrito no passo 1 da metodologia. Finalmente, presumimos que o interprete não sabe o desvio padrão do dado real simulado, e, para as 25 sequências de ruído pseudoaleatório, ele especifica desvios padrões cinquenta e vinte e cinco por cento maiores do que o desvio padrão aplicado na simulação do dado real de gravimetria e sísmica respectivamente.

Os gráficos resultante $\rho_k \times \mu_k$ para os dados gravimétricos e sísmicos são mostrados na Figura 2.13a-b, respectivamente, em linhas tracejadas. Note que, a menos de um deslocamento aproximadamente constante ao longo do eixo vertical, estas curvas são similares aos correspondentes gráficos $\rho_k \times \mu_k$ originais (linha sólida) mostrados previamente nas Figuras 2.3 e 2.7, respectivamente. A única exceção ocorre para valores de μ menores do que 8 nos dados sísmicos devido ao efeito combinado do ruído no dado e da deficiência do traçado de raios como discutido anteriormente.

A semelhança entre as curvas tracejada e contínuas na Figura 2.13a-b não é fortuita. Esta semelhança está relacionada ao fato de que as observações “reais” consistem de uma

componente determinística contaminada por uma única sequência de realizações de ruído de baixa amplitude. Consequentemente, a aplicação do método proposto a dados reais é equivalente à aplicação dos mesmos passos descritos no caso de dados sintéticos sem ruído, com a diferença que cada observação “real” é agora composta por perturbações de pequena amplitude (consistindo de uma única realização de uma variável aleatória) adicionada à componente determinística teórica. Portanto, a perturbação de dados reais por várias sequências de ruído não pode ser encarada como a soma de duas variáveis aleatórias. Consequentemente, a variância do dado “real” perturbado não segue a propriedade teórica da variância de uma soma de variáveis aleatórias independentes. Contrariamente, a variância do dado “real” perturbado estará muito próxima à variância da variável aleatória geradora das sequências de realizações de ruído

De fato, usando para o desvio padrão do ruído pseudoaleatório na simulação do dado real o mesmo valor empregado na produção do gráfico $\rho_k \times \mu_k$, ambas as linhas tracejadas e sólidas na Figura 2.13a-b ficaram muito próximas umas das outras (não mostrado). Como resultado, a determinação da região de curvatura máxima da curva $\rho_k \times \mu_k$ pode ser calculada satisfatoriamente em dados reais, e isto basta para encontrar o limite inferior μ^c do intervalo de μ ao longo do qual o decréscimo na instabilidade deve ser visualmente inspecionado.

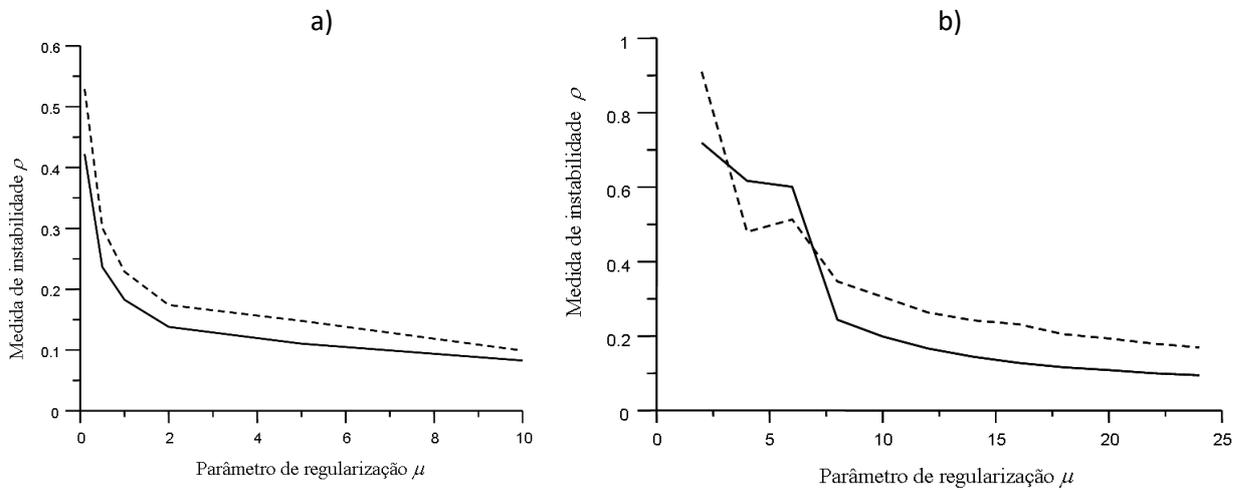


Figura 2.13: Gráficos $\rho_k \times \mu_k$ para a simulação de aplicação a dados reais (linha tracejada) comparada com a aplicação a dados sintéticos (linha sólida) para experimentos de gravimetria (a) e sísmica (b).

2.5 CONCLUSÕES

Evidenciamos que instabilidade, ao contrário de não unicidade, não é um estado dicotômico o qual admite apenas duas possibilidades: sim ou não. Além disso, defendemos que a instabilidade da solução em um problema inverso é dependente do propósito do intérprete. Propusemos uma medida quantitativa da instabilidade da solução que rastreia o efeito da instabilidade na solução do problema inverso. Os dados são perturbados com várias sequências de ruído pseudoaleatório e a máxima perturbação nos pares de soluções obtidas com um mesmo parâmetro de regularização é tomada como uma medida quantitativa que pode ser plotada contra o parâmetro de regularização. As soluções produzidas pelo mesmo parâmetro de regularização e diferentes perturbações nos dados são então visualmente inspecionadas para

cada parâmetro de regularização a começar por aquele associado com a máxima curvatura do gráfico mencionado acima. O intérprete então seleciona o parâmetro de regularização que melhor satisfaz os seus objetivos e à sua necessidade de estabilização.

Enfatizamos que, quando a razão para se recorrer à regularização da solução é unicamente voltada a evitar a instabilidade, o parâmetro de regularização deve ser o menor valor satisfazendo o critério do intérprete de instabilidade/estabilidade. A opção pelo maior parâmetro de regularização que ainda ajusta os dados deve ser reservada apenas ao caso em que existe evidência geológica confiável de que o atributo incorporado pelo funcional estabilizador (usualmente a suavidade espacial da fonte) é uma propriedade real da fonte.

Devido às premissas necessárias para aplicar o método proposto serem bastante fracas, este tem um amplo espectro de aplicação. Demonstramos parte deste potencial através da aplicação do método em dados gravimétricos, sísmicos e magnetotelúricos usando dois modelos interpretativos diferentes. Em regiões complexas, o método permite a escolha do melhor parâmetro de regularização para pequenas áreas dentro da área de estudos.

A curva consistindo da medida quantitativa de instabilidade contra o parâmetro de regularização tende a ser monotonicamente decrescente. A falha em atingir esta característica pode ter origem no pequeno número de sequências pseudoaleatórias que perturbam as observações ou em uma convergência prematura no caso de métodos iterativos aplicados na solução de problemas inversos não lineares.

CAPÍTULO 3

INVERSÃO CONJUNTA

3.1 INTRODUÇÃO

Conforme mencionado na Introdução Geral, a inversão conjunta de dados geofísicos é um processo conceitualmente simples, mas dependente, na prática de pequenos detalhes que podem fazer a distinção entre o sucesso e o fracasso. Entre eles mencionamos a normalização dos dados, uma vez que as observações a serem invertidas possuem unidades, e, por conseguinte valores numéricos que podem variar de mais de uma ordem de magnitude. Além disso existe a necessidade de definir, em bases geológicas, parâmetros comuns a todos os métodos envolvidos e incorporar restrições de caráter físico-geológico entre eles. Finalmente, há a necessidade de extrair a máxima informação possível de cada método, caso contrário a inversão conjunta pode produzir resultados surpreendentemente errados, como soluções piores que aquelas obtidas usando as inversões isoladas dos mesmos métodos geofísicos.

Neste capítulo mostramos que o emprego judicioso da normalização dos dados, dos vínculos cruzados e da estimação do parâmetro de regularização leva a resultados satisfatórios da inversão simultânea de dados gravimétricos, sísmicos e magnetotelúricos. Papel importante nesse processo é reservado ao uso do coeficiente de correlação como vínculo estrutural entre

os parâmetros dos métodos envolvidos, e ao método para estimação do parâmetro de regularização desenvolvido no capítulo 2.

3.2 METODOLOGIA

A seguir formulamos matematicamente o problema da inversão conjunta utilizando o vínculo estrutural proposto neste trabalho. As expressões foram desenvolvidas considerando três métodos geofísicos mas podem ser facilmente generalizadas para um número arbitrário de métodos.

Seja d um vetor de dados composto por observações sísmicas (d_{sis}), eletromagnéticas (d_{EM}) e gravimétricas (d_{grav})

$$d = \begin{pmatrix} d_{sis} \\ d_{EM} \\ d_{grav} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

E sejam $F_{sis}(s)$, $F_{EM}(u)$ e $F_{grav}(\rho)$ os respectivos funcionais geofísicos ajustantes, sendo s , u e ρ respectivamente, vetores contendo as distribuições de vagarosidade da onda sísmica P, do logaritmo decimal da resistividade elétrica e de densidade, parametrizadas em uma malha regular. Definindo o vetor

$$p = \begin{pmatrix} s \\ u \\ \rho \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

a inversão conjunta de dados sísmicos, eletromagnéticos e gravimétricos pode ser formulada como a obtenção de uma estimativa \hat{p} do vetor p dada por

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{u} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} = \arg \min_p \Theta \quad (3.3)$$

em que

$$\Theta = \lambda_{sis} \phi_{sis}^{data} + \lambda_{EM} \phi_{EM}^{data} + \lambda_{grav} \phi_{grav}^{data} + \mu_{sis} \phi_{sis}^{reg} + \mu_{EM} \phi_{EM}^{reg} + \mu_{grav} \phi_{grav}^{reg} + \mu_{sg} \phi_{xcorr}(s, \rho) - \mu_{se} \phi_{xcorr}(s, u) - \mu_{eg} \phi_{xcorr}(u, \rho) \quad (3.4)$$

$$\phi_{sis}^{data} = \|d_{sis} - F_{sis}(s)\|_2^2 \quad (3.5)$$

$$\phi_{EM}^{data} = \|d_{EM} - F_{EM}(u)\|_2^2 \quad (3.6)$$

$$\phi_{grav}^{data} = \|d_{grav} - F_{grav}(\rho)\|_2^2 \quad (3.7)$$

$$\phi_{sis}^{reg} = s^T R^T R s \quad (3.8)$$

$$\phi_{EM}^{reg} = u^T R^T R u \quad (3.9)$$

$$\phi_{grav}^{reg} = \rho^T R^T R \rho \quad (3.10)$$

$$\phi_{xcorr}(x, y) = r^2 \quad (3.11)$$

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{cov}(x, x)} \sqrt{\text{cov}(y, y)}} \quad (3.12)$$

$$\text{cov}(x, y) = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (3.13)$$

R é o operador discreto de primeiras derivadas espaciais e os funcionais $\phi_{xcorr}(x, y)$ incorporam vínculos estruturais, caracterizados por possíveis similaridades geométricas entre as distribuições espaciais de propriedade física. Tais informações advêm principalmente do conhecimento geológico a priori da área de estudo. Os parâmetros μ_{sis} , μ_{EM} e μ_{grav} controlam

o grau de suavidade imposta às distribuições espaciais de velocidade, de logaritmo decimal da resistividade e de densidade, respectivamente, através dos funcionais regularizadores $s^T R^T R s$, $u^T R^T R u$ e $\rho^T R^T R \rho$, que incorporam o vínculo estabilizador de suavidade global. Os parâmetros μ_{se} , μ_{sg} e μ_{eg} controlam, respectivamente, os graus de similaridade entre as distribuições: de velocidade e de logaritmo decimal da resistividade, de velocidade e de densidade, e de logaritmo decimal da resistividade e de densidade. Finalmente, os parâmetros λ_{sis} , λ_{EM} e λ_{grav} compensam o fato de as observações de diferentes métodos geofísicos serem expressas em unidades diferentes de modo que os valores numéricos associados a diferentes unidades podem diferir por uma ou mais ordens de magnitude. Quando isso acontece, o termo expressando o funcional de ajuste associado com valores numéricos muito maiores que os de outro termo produzirá, no processo de minimização do funcional Θ (equação 3.4), um ajuste muito bom, em detrimento do outro termo associado a valores pequenos.

Vínculos estruturais cruzados

Além do vínculo de suavidade global, aplicado às parcelas da função-objetivo correspondentes às medidas de desajuste de cada método geofísico individual, é necessário aplicar vínculos envolvendo pares de medidas de desajuste de métodos distintos, no caso, sísmica e gravimetria, sísmica e eletromagnetismo e gravimetria e eletromagnetismo. Tais vínculos são necessários, caso contrário, a inversão conjunta será idêntica às inversões isoladas de cada tipo de observação geofísica. Eles podem ser de dois tipos: petrofísicos e estruturais.

Os vínculos petrofísicos presumem a validade de uma lei petrofísica relacionando duas propriedades físicas diferentes como a lei de Gardner (Gardner et al. (1974)), relacionando a velocidade da onda sísmica P e a densidade e a combinação das equações de Archie (Archie et al. (1942)) e Gassmann (Gassmann (1951)) levando a uma relação entre a velocidade da onda sísmica P e o logaritmo decimal da resistividade elétrica.

Os vínculos estruturais, por sua vez, presumem que as distribuições de propriedade física (velocidade da onda sísmica, densidade e resistividade elétrica) carregam um certo grau de similaridade geométrica na sua distribuição espacial. O grau de similaridade é especificado pelo usuário com base no conhecimento geológico disponível. Um dos vínculos estruturais mais comumente empregados é o *cross-gradient* (Meju et al. (2003), Fregoso and Gallardo (2009), Gallardo and Meju (2003)) que consiste em medir a similaridade entre duas imagens $f(x, z)$ e $h(x, z)$, representando duas variações espaciais de propriedade física. A similaridade entre $f(x, z)$ e $h(x, z)$ é expressa através da minimização do produto vetorial entre os gradientes espaciais $\nabla f(x, z)$ e $\nabla h(x, z)$ destas duas imagens:

$$\|\nabla f(x, z) \wedge \nabla h(x, z)\| = \|\nabla f(x, z)\| \|\nabla h(x, z)\| \sin \beta \quad (3.14)$$

em que β é o ângulo entre os vetores-gradientes. Neste trabalho optamos por utilizar apenas o vínculo estrutural, uma vez que consideramos os vínculos petrofísicos pouco realísticos do ponto de vista geológico, além de demandar uma enorme quantidade de informação a priori, especificando a confiabilidade com que se presume a validade das relações petrofísicas em cada subárea da área de estudo. Além disso, não existem relações petrofísicas reportadas entre a densidade e a resistividade elétrica.

Dentre os vínculos estruturais, optamos por um vínculo estrutural muito mais simples de ser implementado e muito menos oneroso computacionalmente que o *cross-gradient*: o coeficiente de correlação amostral, (Meyer (1970); Zhdanov et al. (2012)), definido como

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N [f(x_i, z_i) - \bar{f}][h(x_i, z_i) - \bar{h}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [f(x_i, z_i) - \bar{f}]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N [h(x_i, z_i) - \bar{h}]^2}} \quad (3.15)$$

em que \bar{f} e \bar{h} são as médias amostrais de f e h , respectivamente. Dadas por

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, z_i) \quad (3.16)$$

e

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_i, z_i) \quad (3.17)$$

sendo $f(x_i, z_i)$ e $h(x_i, z_i)$ duas distribuições espaciais de propriedade física (velocidade sísmica, densidade ou resistividade elétrica).

A ponderação diferencial do ajuste das observações

Considere a parte da equação 3.4 contendo os termos que controlam os ajustes dos N_g dados gravimétricos, N_s dados sísmicos e N_e dados eletromagnéticos

$$\begin{aligned} \Psi = & \lambda_s \left[\sum_{i=1}^{N_s} \frac{(d_i^s - f_i^s(\mathbf{p}^s))^2}{N_s \delta_s^2} \right] \\ & + \lambda_e \left[\sum_{i=1}^{N_e} \frac{(d_i^e - f_i^e(\mathbf{p}^e))^2}{N_e \delta_e^2} \right] \\ & + \lambda_g \left[\sum_{i=1}^{N_g} \frac{(d_i^g - f_i^g(\mathbf{p}^g))^2}{N_g \delta_g^2} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

na qual δ_g , δ_s e δ_e especificam os valores aceitáveis para os desajustes dentro da precisão experimental para cada conjunto de dados. Os parâmetros λ_s , λ_e e λ_g permitem ainda ao intérprete uma ponderação relativa entre os funcionais ajustantes associados a cada método geofísico. Em nossos experimentos numéricos fazemos $\lambda_g = 1$ em todas as iterações. Este valor também é atribuído inicialmente a λ_s e λ_e . Adotamos o seguinte procedimento:

- 1) Realizamos uma inversão conjunta até o processo iterativo convergir;

2) Se o erro médio quadrático dos resíduos entre as observações d_i^s e os respectivos ajustes $F_i^s(\mathbf{p}^s)$ (usando as estimativas de parâmetros obtidas no item 1) for igual ou menor que δ_s^2 , o valor empregado para λ_s não será mais modificado; caso contrário, λ_s deve ser aumentado.

Idem o caso de λ_e ;

3) Se λ_s e λ_e não forem modificados, as estimativas dos parâmetros, obtidas com $\lambda_g = 1$ e com λ_s e λ_e obtidos no item 2, são aceitas; caso contrário, o processo iterativo (item 1) é repetido usando os últimos valores modificados de λ_s e λ_e .

Interpolação dos parâmetros para a malha de inversão

Em geral as malhas usadas nas parametrizações de cada método serão diferentes. No entanto para que o vínculo de correlação possa ser aplicado é necessário que todas as propriedades físicas sejam definidas em uma mesma malha. Esse problema é resolvido através da seleção de uma malha de referência na qual as correlações serão calculadas e interpolando as propriedades físicas nessa malha. Nos testes realizados neste trabalho que envolveram inversão conjunta sempre selecionamos a malha mais fina como a malha de referência.

3.3 TESTES NUMÉRICOS

Nesta seção descrevemos três casos de aplicação da metodologia proposta: i) inversão conjunta envolvendo sísmica e gravimetria e ii) inversão conjunta envolvendo sísmica e MT e iii) Inversão conjunta envolvendo sísmica, gravimetria e MT. Todos os testes foram realizados com um modelo simulando um ambiente de bacia sedimentar com um corpo intrusivo de alta velocidade, alta resistividade e baixa densidade relativamente aos sedimentos (Figuras 3.1a, 3.1b e 3.1c respectivamente), simulando um domo de sal. Lembramos que os dados sísmicos

correspondem a medidas de tempo de trânsito de eventos de primeira chegada (apenas transmissão), os dados de MT correspondem a resistividade aparente e fase apenas para o modo TM e os dados gravimétricos correspondem a valores da componente vertical da aceleração da gravidade como é o usual.

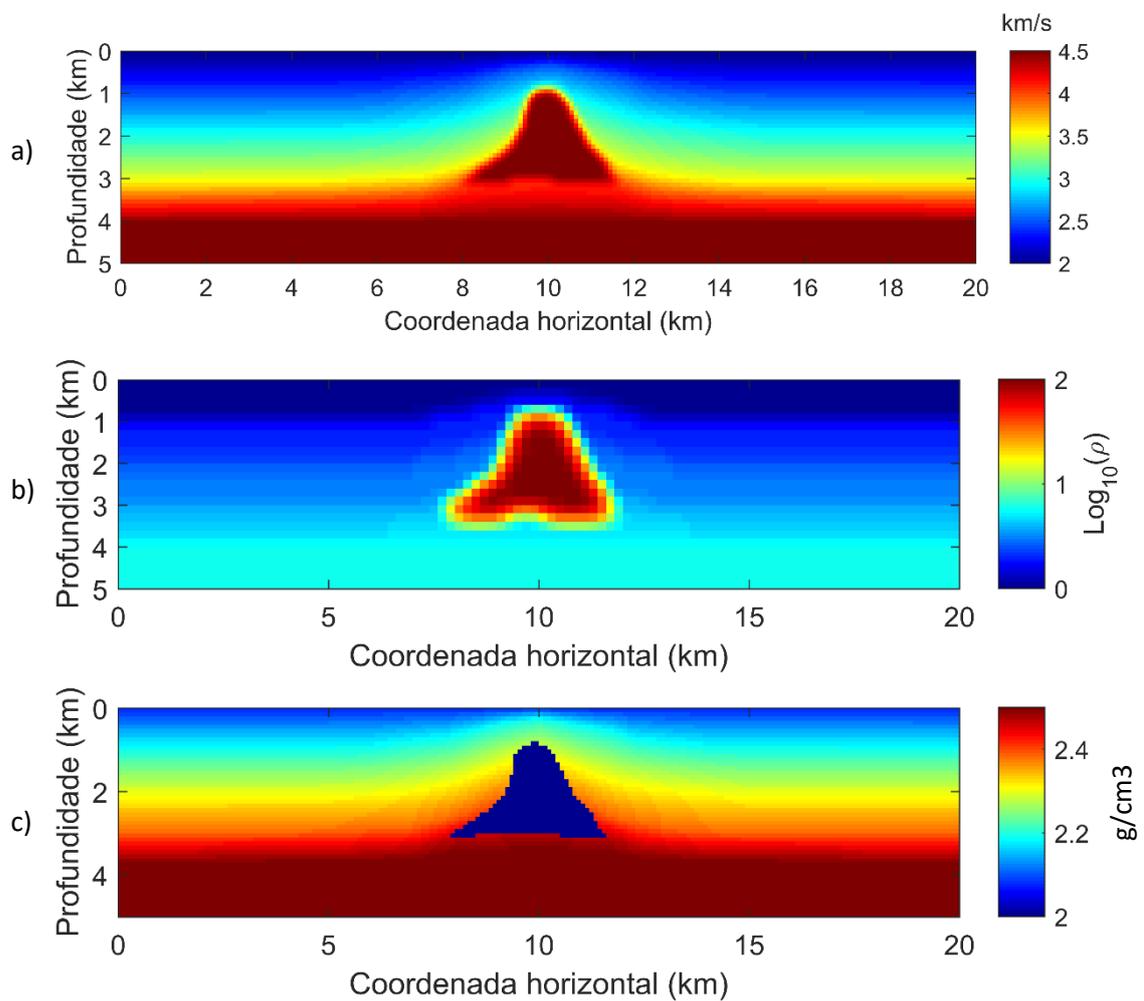


Figura 3.1: a) Modelo de velocidade, b) modelo de resistividade e c) modelo de densidade utilizados na validação das inversões.

3.3.1 INVERSÃO CONJUNTA SÍSMICA - GRAVIMETRIA

Neste primeiro caso avaliamos o sinergismo entre as estimativas de densidade e de velocidade através da inversão conjunta de sísmica e gravimetria usando o vínculo estrutural de correlação cruzada (eq. 3.11) entre velocidade e densidade.

A função-objetivo a ser minimizada neste caso é

$$\Theta = F_{sis} + F_{grav} - \mu_{sg} F_{xcorr} \quad (3.19)$$

Com as seguintes definições auxiliares

$$F_{sis} = \lambda_{sis} \phi_{sis}^{data} + \mu_{sis} \phi_{sis}^{reg} \quad (3.20)$$

$$F_{grav} = \lambda_{grav} \phi_{grav}^{data} + \mu_{grav} \phi_{grav}^{reg} \quad (3.21)$$

$$F_{xcorr} = \varphi_{xcorr}^2(s, \rho). \quad (3.22)$$

Para evitar que a distribuição espacial de densidade estimada se concentre na superfície em consequência do viés biharmônico do vínculo de suavidade (Silva et al., 2014), o vetor solução, obtido ao término de uma iteração do processo inverso, foi multiplicado por uma função-peso dada por

$$w(z, z_A, z_B) = \frac{\alpha + \exp\left(\frac{r(z-z_A)}{\Delta z}\right)}{1 + \exp\left(\frac{r(z-z_A)}{\Delta z}\right)} - \frac{\alpha + \exp\left(\frac{r(z-z_B)}{\Delta z}\right)}{1 + \exp\left(\frac{r(z-z_B)}{\Delta z}\right)} \quad (3.23)$$

antes de ser usado na modelagem direta que produz a anomalia gravimétrica ajustante a partir do vetor-solução.

As observações sísmicas e gravimétricas empregadas nas inversões isoladas mostradas foram utilizadas para inversão conjunta sísmica-gravimetria. Inicialmente foram realizados os experimentos numéricos para selecionar os parâmetros de regularização seguindo estritamente

a metodologia descrita no capítulo 1. O intervalo de 1 a 10 foi selecionado para determinação do parâmetro μ_s . Foram geradas 25 sequências de ruído uniforme pseudoaleatório no intervalo de $[-0.010, 0.010]$ segundos para contaminar os dados sísmicos e no intervalo de $[-0.1, 0.1]$ mGals para contaminar os dados gravimétricos. A mesma função peso usada para inversão gravimétrica isolada foi utilizada na inversão conjunta. O parâmetro de regularização associado a similaridade estrutural μ_{sg} foi fixado em 25. O valor μ_g foi fixado em 0.001. Após os experimentos numéricos selecionamos o valor $\mu_s = 6$ como parâmetros de regularização ótimo para suavização do modelo de velocidade.

A seguir descrevemos:

- Os modelos interpretativos usados para a modelagem e a inversão
- Simulação dos dados sísmicos e gravimétricos
- Inversões isoladas da sísmica e da gravimetria
- Resultados da inversão conjunta sísmica-gravimetria

Modelos interpretativos

A região de interesse em subsuperfície foi discretizada como uma malha regular de acordo com os parâmetros descritos na tabela abaixo em que presumimos valores constantes de velocidade/densidade dentro de cada célula para os modelos de velocidade e de densidade, respectivamente:

Tabela 3.1. Parâmetros de discretização dos modelos interpretativos utilizados na modelagem e inversão sísmica e gravimétrica.

Número de células em x	200
Número de células em z	50
Largura das células em x	0.100 km
Largura das células em z	0.100 km

Extensão horizontal do modelo: 20.0 km

Extensão vertical do modelo: 5.0 km

Aquisição sísmica

Valores de tempo de trânsito correspondentes a eventos de transmissão foram calculados para o modelo de velocidade de referência (Figura 3.1a) de acordo com a configuração de fontes e receptores descrita na tabela 3.1. Todas as fontes e receptores foram colocados em $z = 0.0$ km. Cada valor de tempo de trânsito calculado foi perturbado com a adição de ruído aleatório de acordo com a seguinte expressão

$$s = 2a(r - 0.5) , \quad (3.24)$$

em que r é um número aleatório obtido a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$ e $a = 0.010$, simulando um nível de ruído em torno de 10 ms.

Tabela 3.2. Parâmetros para simulação de dados sísmicos.

Número de fontes	70
Coordenada x da primeira fonte	0.050 km
Distância entre fontes	0.200 km
Número de receptores por fonte	70
Coordenada x do primeiro receptor	0.050 km
Distância entre receptores	0.250 km

Aquisição da gravimetria

A aquisição dos dados gravimétricos foi simulada para o modelo de densidade de referência (Figura 3.1c) com um total de 200 medidas localizadas em $z=0$ e distribuídas uniformemente ao longo de toda a extensão horizontal do modelo (de 0 a 20.0 km). A estes dados foi adicionado ruído de acordo com a equação 2.18 com $a = 0.1$ simulando um nível de ruído em torno de 0.1 mGals.

O modelo gravimétrico foi estendido por 100 km à esquerda e à direita para evitar efeitos de borda.

As figuras 3.2a e 3.2b mostram os dados simulados para a gravimetria e para a sísmica, respectivamente. No caso da gravimetria a Figura 3.2a mostra apenas a anomalia gravimétrica associada à região do modelo de referência.

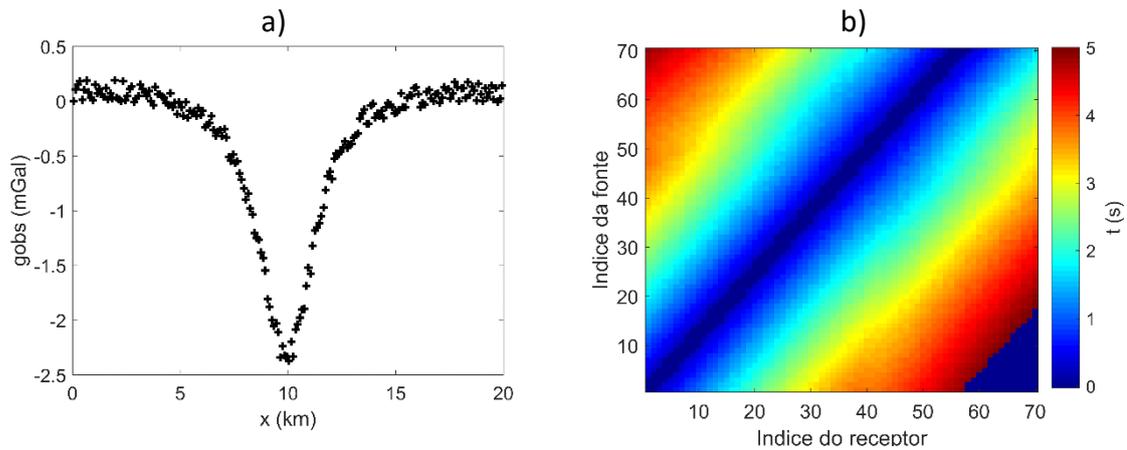


Figura 3.2: Dados sintéticos. a) campo gravimétrico e b) tempos de trânsito. Calculados para os modelos de referência.

Inversão

Nesta seção comparamos as estimativas de velocidade e de densidade obtidas nas inversões isoladas (sísmica e gravimetria) com as estimativas resultantes da inversão conjunta sísmica-gravimetria. O parâmetro de regularização da suavidade aplicado na sísmica foi selecionado de acordo com os resultados do capítulo 2. A regularização na gravimetria ficou restrita à aplicação de vínculos caixa no contraste de densidade e na profundidade (z) de acordo com o perfil mostrado na Figura 3.3.

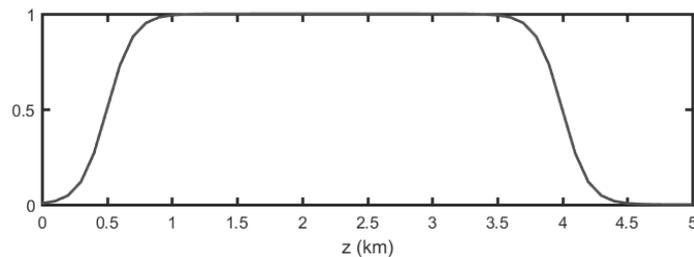


Figura 3.3: Perfil do peso em profundidade aplicado a inversão gravimétrica.

A seguir descrevemos os principais parâmetros utilizados nas inversões:

Sísmica isolada

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{sis} = 8.0$

Vínculo caixa na vagarosidade: $0.1 \leq s \leq 1.0$

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4a.

Sísmica conjunta

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{sis} = 8.0$

Vínculo caixa na vagarosidade: $0.1 \leq s \leq 1.0$

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4a.

Peso do vínculo de correlação: 10.0

Gravimetria isolada

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{grav} = 0.01$

Vínculo caixa (contraste de densidade): $-5.0 \leq \Delta\rho \leq 0.1$

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4b.

Gravimetria conjunta

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{grav} = 0.01$

Vínculo caixa (contraste de densidade): $-5.0 \leq \Delta\rho \leq 0.1$

Peso do vínculo de correlação: 10.0

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4b.

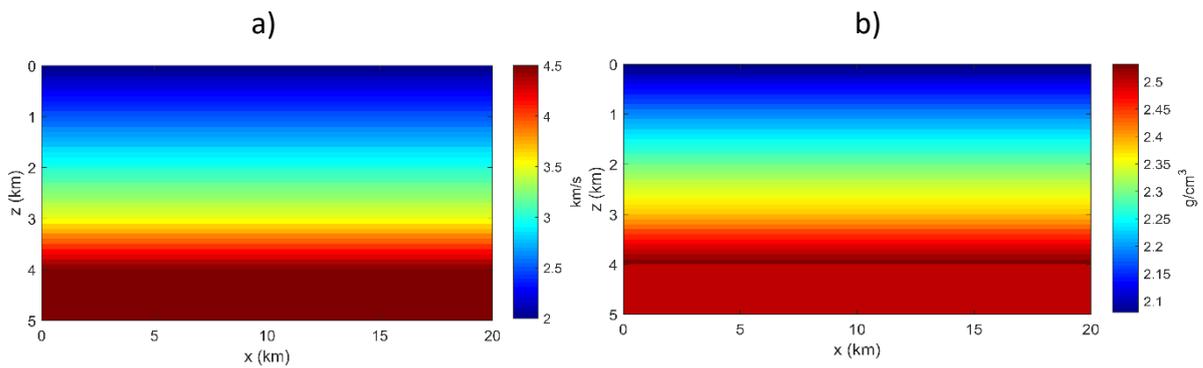


Figura 3.4: Aproximações iniciais para inversão sísmica-gravimetria. a) velocidade e b) densidade.

Discussões sobre os resultados da inversão conjunta sísmica-gravimetria

A Figura 3.5 mostra o modelo estimado de velocidade pela inversão conjunta para quatro realizações diferentes do ruído aleatório que contaminou os dados observados. A pequena variação destas imagens, particularmente na região do domo de sal ilustram a estabilidade da inversão para o modelo de velocidade. O mapa de resíduo dos tempos de trânsito na Figura 3.9 comprova que estas soluções ajustam os dados nos limites do ruído para a grande maioria das estações. A estabilidade da inversão conjunta para estimativa do modelo de densidade está ilustrada na Figura 3.6 também para quatro realizações independentes de ruído aleatório. A Figura 3.10 comprova que estas soluções ajustam os dados gravimétricos nos limites do ruído. A correlação os entre dos modelos de velocidade de densidade resultantes da inversão conjunta ficou em torno de 0.98 atestando a forte coercividade associada ao elevado valor de μ_{sg} para garantir a similaridade estrutural entre as soluções.

A diferença entre os modelos de velocidade e densidade estimados pela inversão isolada e a inversão conjunta de dados sísmicos e gravimétricos pode ser apreciada nas Figuras 3.7 e 3.8, respectivamente. A Figura 3.7 mostra um inequívoco ganho de resolução lateral e vertical da inversão conjunta em relação a inversão isolada, atribuímos este resultado a maior resolução

lateral de dados gravimétricos em relação a resolução lateral dos eventos exclusivamente de primeira chegada usados como dados sísmicos. Correspondentemente, a Figura 3.8 mostra o melhor posicionamento em profundidade do contraste de densidade obtido pela inversão conjunta em consequência da maior resolução vertical dos dados sísmicos na região do domo.

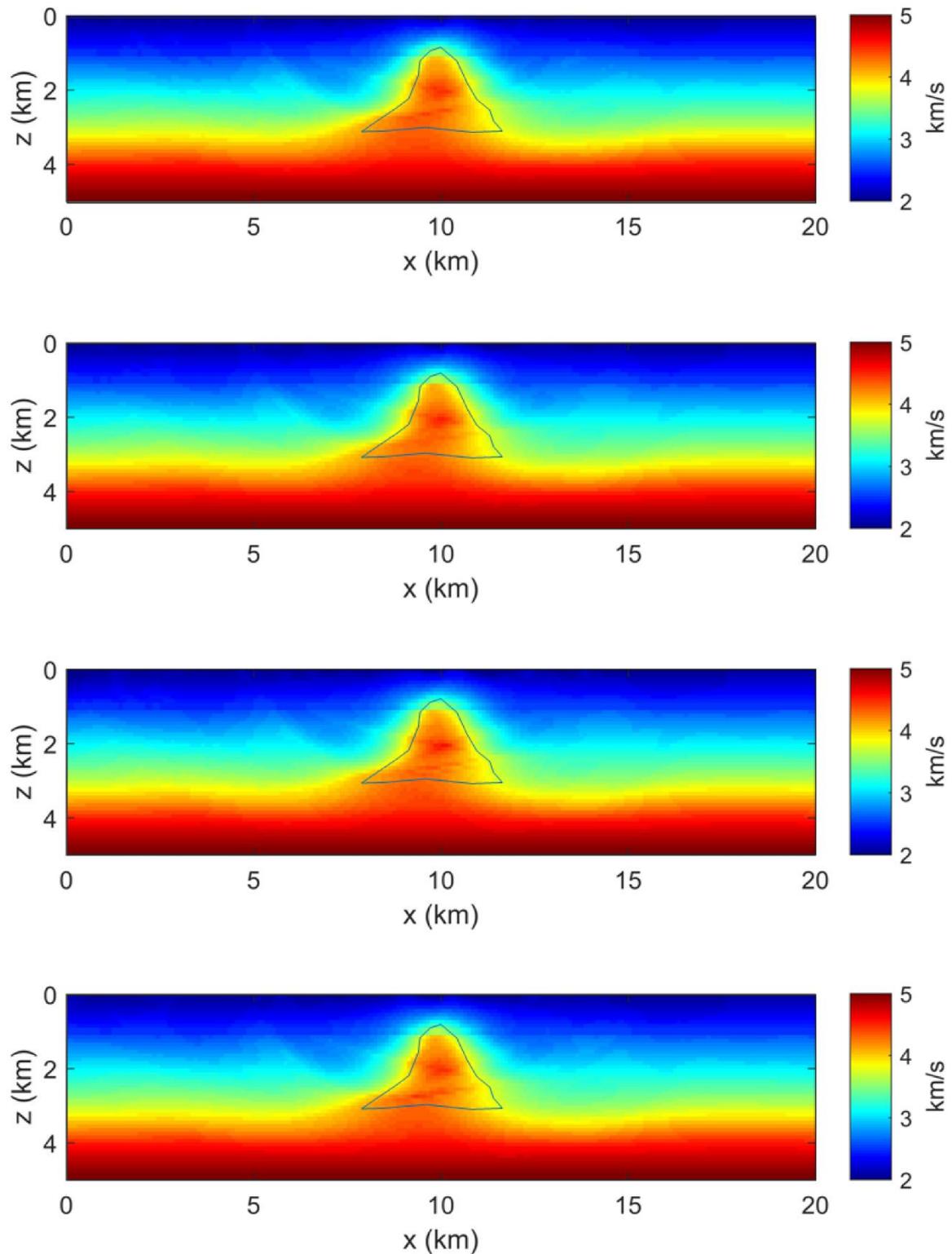


Figura 3.5: Distribuições de velocidade estimadas pela inversão conjunta sísmica-gravimetria para dados contaminados com 4 realizações de ruído pseudo-aleatório uniforme. Os parâmetros de regularização foram $\mu_s = 6$, $\mu_g = 0.001$ e $\mu_{sg} = 25.0$. O valor da correlação entre as distribuições de velocidade e densidade foi de 0.98.

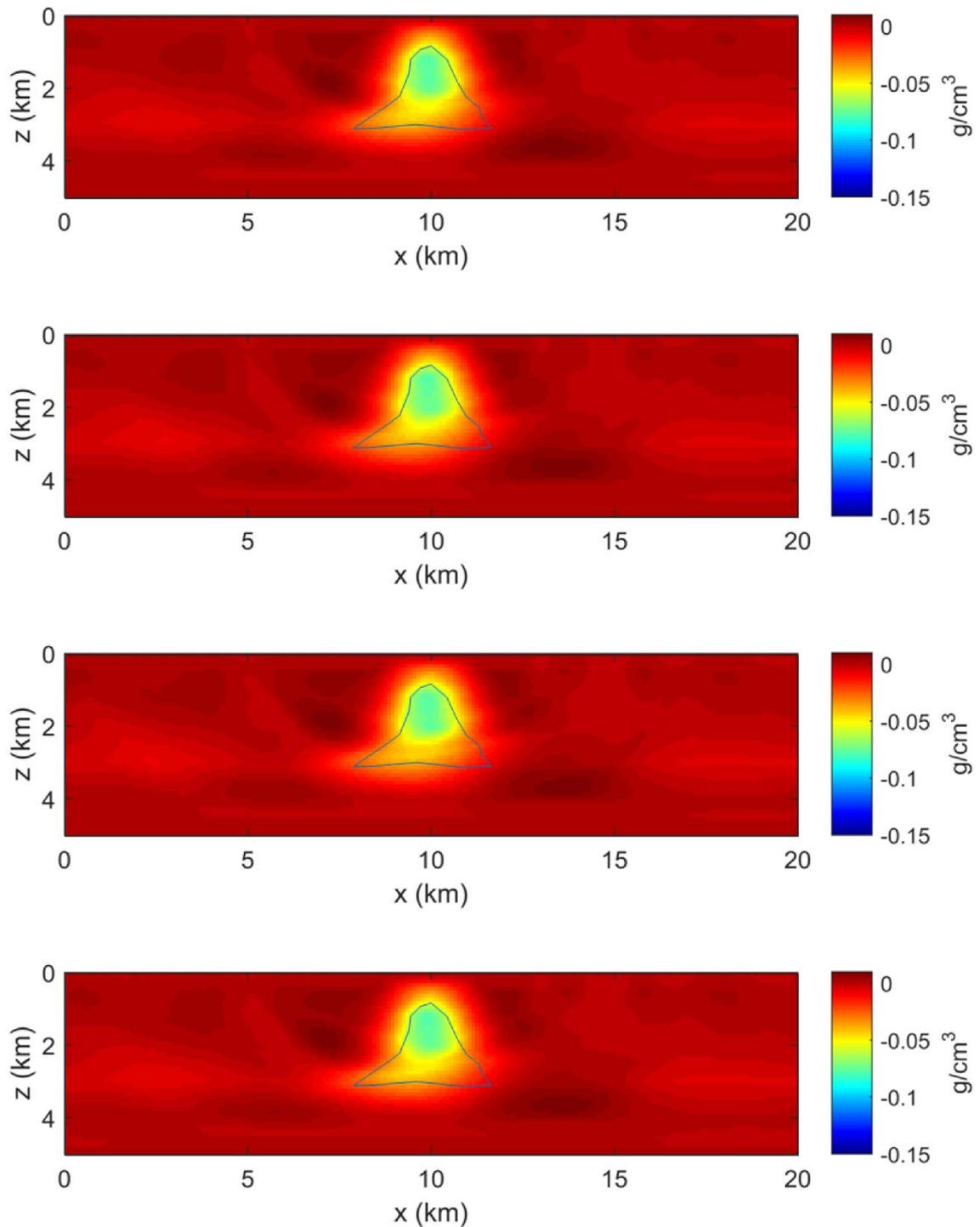


Figura 3.6: Distribuições de densidade estimadas pela inversão conjunta sísmica-gravimetria para dados contaminados com 4 realizações de ruído pseudo-aleatório uniforme. Os parâmetros de regularização foram $\mu_s = 6$, $\mu_g = 0.001$ e $\mu_{sg} = 25.0$. O valor da correlação entre as distribuições de velocidade e densidade foi de 0.98.

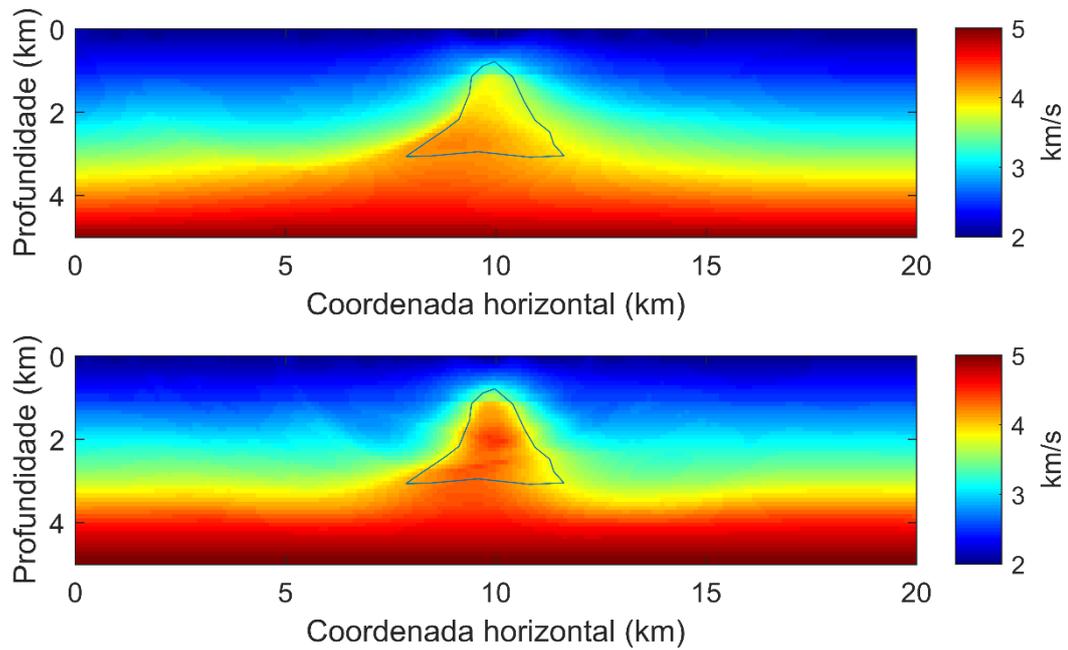


Figura 3.7: Modelo de velocidade estimado pela inversão de dados sísmicos isolados (acima), modelo de velocidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimetria (abaixo).

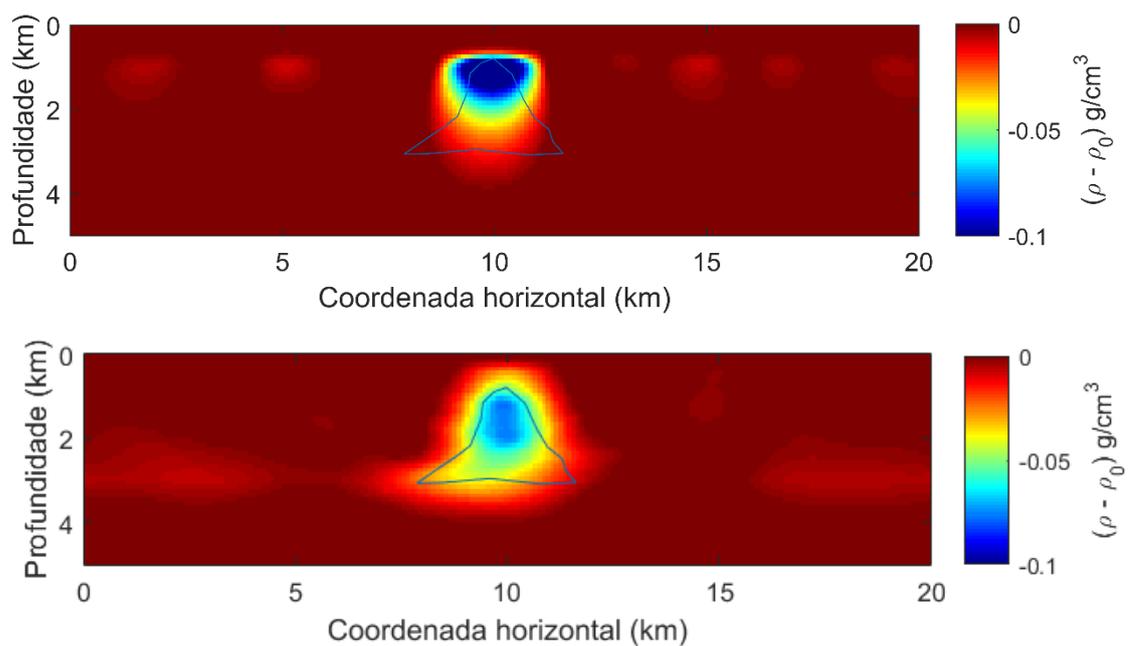


Figura 3.8: Modelo de densidade estimado pela inversão de dados gravimétricos isolados (acima), modelo de densidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimetria (abaixo).

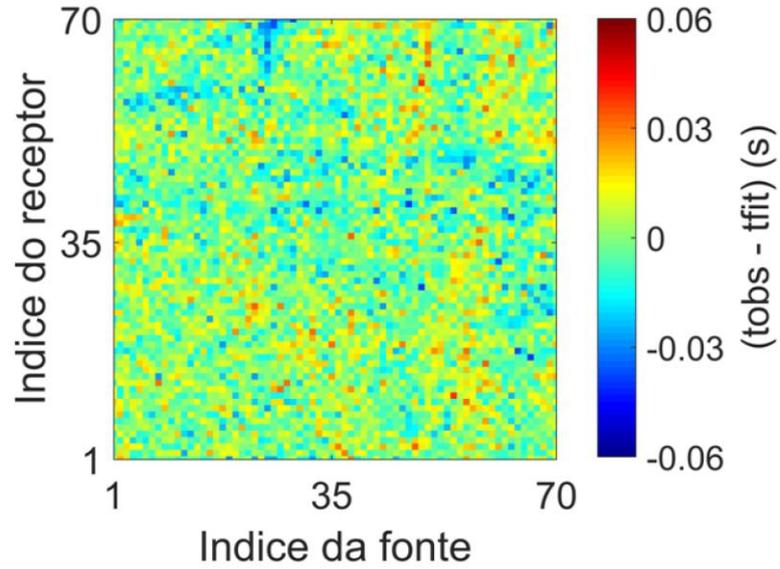


Figura 3.9: Inversão conjunta sísmica-gravimetria. Mapa de resíduos de tempo de trânsito

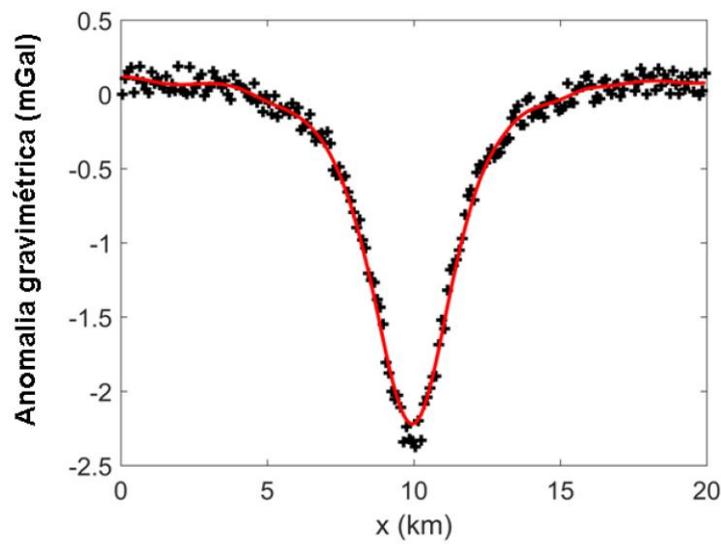


Figura 3.10: Inversão conjunta sísmica-gravimetria. Ajuste dos dados gravimétricos.

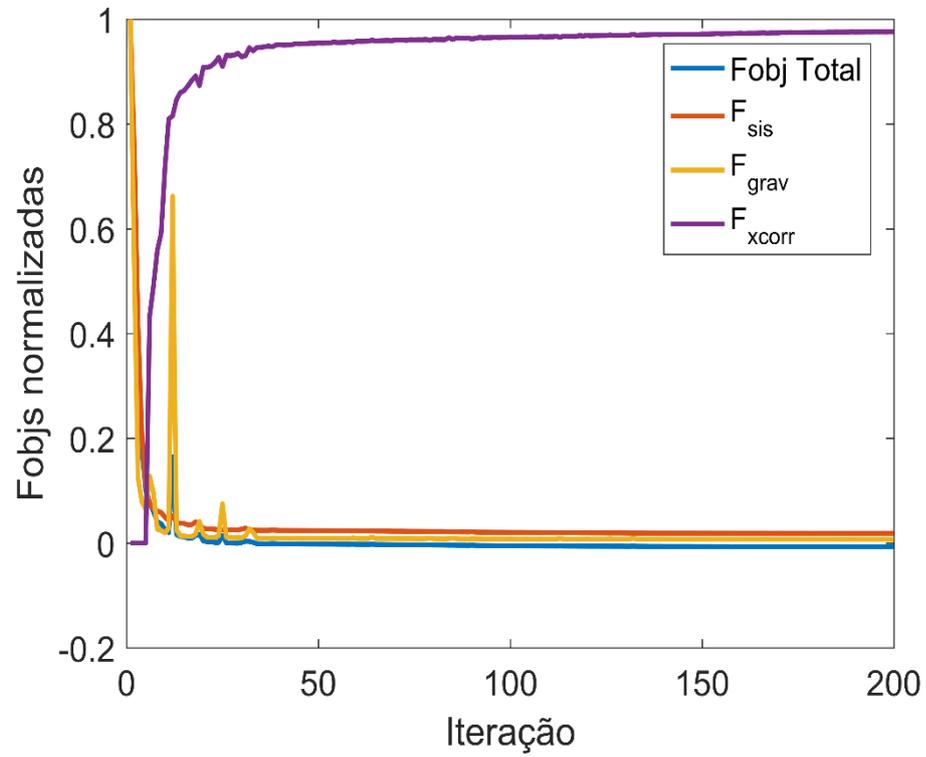


Figura 3.11: Comportamento das várias parcelas da função objetivo total para a inversão conjunta sísmica-gravimetria. $F_{obj\ Total}$ (eq. 2.19), F_{sis} (eq. 2.20), F_{grav} (eq. 2.21), F_{xcorr} (eq. 2.22)

3.3.2 INVERSÃO CONJUNTA SÍSMICA – MT

O método MT (considerando a banda de frequências utilizadas nestes estudos), assim como o método gravimétrico, possui baixa resolução quando comparado com o método sísmico. No entanto, o MT tem um grau de liberdade a mais do que a gravimetria em virtude de que no MT podemos controlar (através do conteúdo de frequência) a resolução e a capacidade de amostragem em profundidade das respectivas propriedades físicas. Nesta seção avaliamos o potencial da combinação sísmica-MT comparando o resultado das inversões isoladas de cada método com os resultados da inversão conjunta empregando o vínculo estrutural de correlação cruzada.

A função-objetivo a ser minimizada neste caso é

$$\Theta = F_{sis} + F_{MT} - \mu_{se} F_{xcorr} \quad (3.25)$$

com as seguintes definições auxiliares

$$F_{sis} = \lambda_{sis} \phi_{sis}^{data} + \mu_{sis} \phi_{sis}^{reg} \quad (3.26)$$

$$F_{MT} = \lambda_{MT} \phi_{MT}^{data} + \mu_{MT} \phi_{MT}^{reg} \quad (3.27)$$

$$F_{xcorr} = \varphi_{xcorr}^2 \left(\frac{1}{s}, \log_{10} u \right). \quad (3.28)$$

A seguir descrevemos respectivamente:

- Os modelos interpretativos usados para a modelagem e inversão
- Simulação dos dados sísmicos e MT
- Inversões isoladas da sísmica e da MT
- Resultados da inversão conjunta sísmica-MT

Ao final desta seção fazemos uma discussão dos resultados obtidos destacando os ganhos obtidos pela inversão simultânea de sísmica e MT para o modelo sintético utilizado.

Modelos interpretativos

A região de interesse em subsuperfície foi discretizada como uma malha regular de acordo com os parâmetros descritos nas tabelas 3.3 e 3.4, para a sísmica e MT respectivamente, em que presumimos valores constantes de velocidade/resistividade dentro de cada célula. Note que as malhas usadas na sísmica e no MT têm espaçamentos diferentes:

Tabela 3.3. Modelo interpretativo para a sísmica.

Número de células em X	200
Número de células em Z	50
Largura das células em X	0.100 km
Largura das células em Z	0.100 km

Tabela 3.4. Modelo interpretativo para o MT.

Número de células em X	100
Número de células em Z	25
Largura das células em X	0.200 km
Largura das células em Z	0.200 km

Extensão horizontal do modelo: 20.0 km

Extensão vertical do modelo: 5.0 km

A malha usada para o MT foi construída com um número menor de células a fim de reduzir os custos relativos a tempo de processamento e quantidade de memória.

Aquisição sísmica

Valores de tempo de trânsito correspondentes a eventos de transmissão foram calculados para o modelo de velocidade de referência usado na seção anterior de acordo com a configuração de fontes e receptores descrita na tabela 3.5. Todas as fontes e receptores foram colocados em $z = 0.0$ km.

Cada valor de tempo de trânsito calculado foi perturbado com a adição de ruído aleatório de acordo com a equação 2.24 com $a = 0.010$, simulando um nível de ruído em torno de 10 ms.

Tabela 3.5. Parâmetros para a geração de dados sísmicos.

Número de fontes	70
Coordenada X da primeira fonte	0.050 km
Distância entre fontes	0.200 km
Número de receptores por fonte	70
Coordenada X do primeiro receptor	0.050 km
Distância entre receptores	0.250 km

Aquisição do MT

Dados de resistividade aparente e fase para o modo TM foram simulados para um total de 40 estações e 4 frequências como descrito na tabela 3.6. Para a resistividade aparente foi adicionado, a cada observação, ruído de uma distribuição uniforme com desvio padrão igual a 2.5% do valor da observação, e, para a fase, foi adicionado ruído de uma distribuição uniforme com intervalo de 0.25° .

Tabela 3.6. Parâmetros para a geração de dados MT.

Número de estações	40
Coordenada X da primeira estação	0.0 km
Espaçamento entre as estações	0.500 km
Frequências	[0.0125 , 0.0250 , 0.0500 , 0.1000] Hz

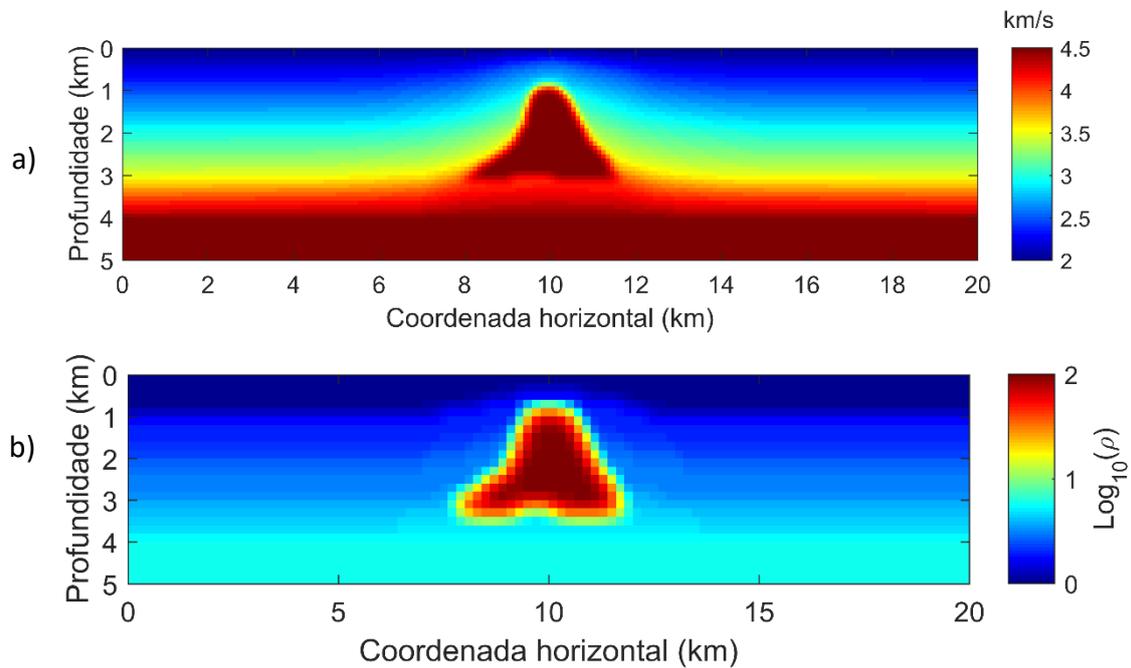


Figura 3.12: a) Modelos de velocidade de referência e b) modelo de resistividade de referência.

Inversão

Nesta seção descrevemos os resultados obtidos através da inversão conjunta sísmica-MT utilizando o vínculo de correlação cruzada para os modelos de velocidade e resistividade exibidos nas Figuras 3.12a e 3.12b respectivamente.

As inversões foram realizadas com os seguintes parâmetros:

Sísmica isolada

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{sis} = 8.0$

Vínculo caixa na vagarosidade: $0.1 \leq s \leq 1.0$

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4a.

Sísmica conjunta

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{sis} = 6.0$

Vínculo caixa na vagarosidade: $0.1 \leq s \leq 1.0$

Aproximação inicial: Modelo de velocidade com gradiente vertical Figura 3.4a.

Peso do vínculo de correlação: 25.0

MT isolada

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{EM} = 20.0$

Vínculo caixa (resistividade): $0.5 \leq u \leq 100.0 \Omega \cdot m$

Aproximação inicial: Modelo de resistividade constante igual a $1.0 \Omega \cdot m$

MT conjunta

Número de iterações SPG: 200

Parâmetro de regularização (suavidade): $\mu_{EM} = 10.0$

Vínculo caixa (resistividade): $0.5 \leq u \leq 100.0 \Omega \cdot m$

Aproximação inicial: Modelo de resistividade constante igual a $1.0 \Omega \cdot m$

Peso do vínculo de correlação: 25.0

Discussões sobre os resultados da inversão conjunta sísmica-MT

As Figuras 3.13a e 3.13b mostram os modelos de velocidade estimados na inversão sísmica isolada e conjunta respectivamente. Assim como na gravimetria, observamos um ganho na definição dos flancos do domo na estimativa da inversão conjunta quando comparada com a inversão isolada. Ambas as soluções ajustaram satisfatoriamente os dados (Figuras 3.14a e 3.14b para a inversão sísmica isolada e conjunta respectivamente).

Os resultados das inversões isolada e conjunta para o MT são mostradas nas Figuras 3.15a e 3.15b respectivamente. Os dados foram ajustados dentro do nível do ruído (Figuras 3.16 e 3.17 para a inversão MT isolada e conjunta respectivamente). Neste caso não notamos nenhuma contribuição significativa da inversão conjunta para a estimativa do modelo de resistividade.

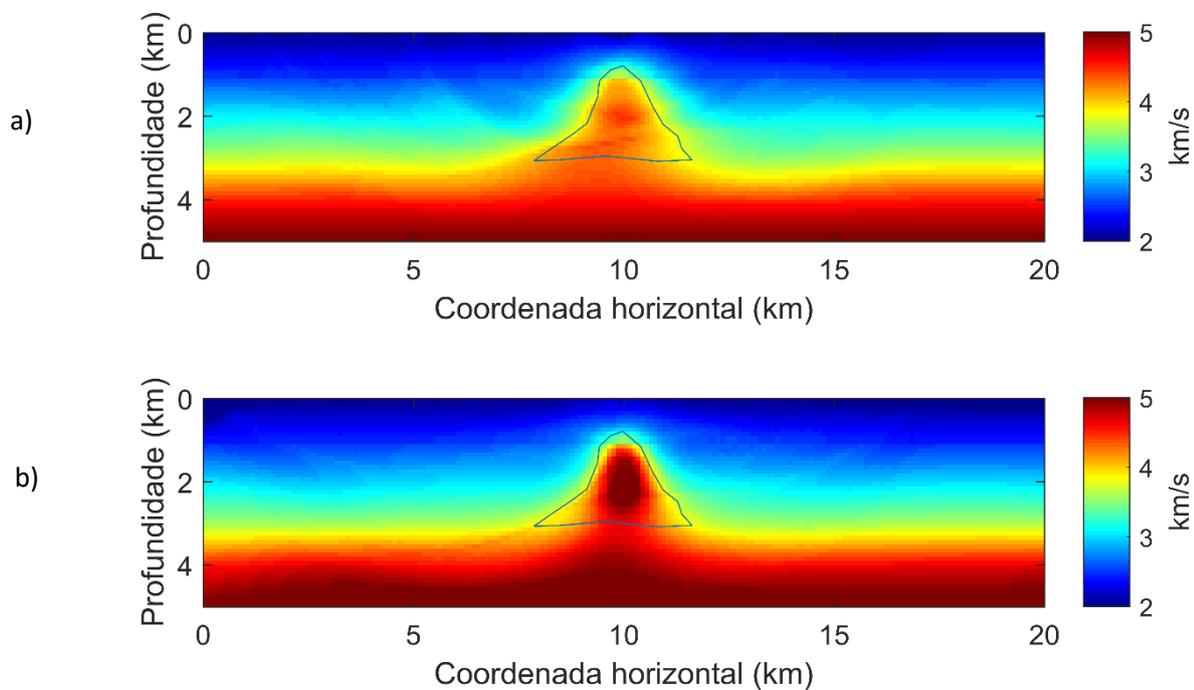


Figura 3.13: – Inversões sísmicas a) Sísmica isolada. b) Sísmica conjunta com gravimetria.

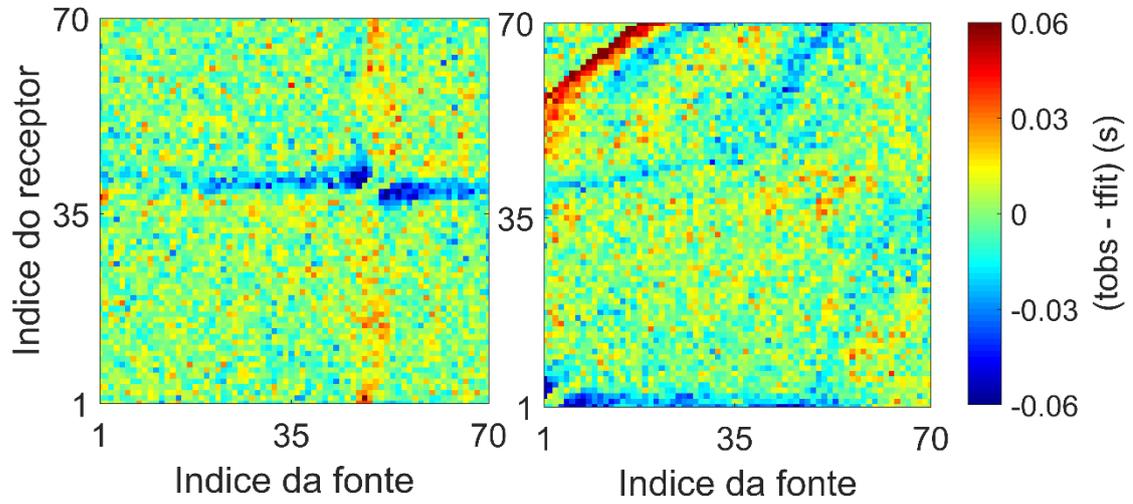


Figura 3.14: (esquerda) resíduo dos dados para a inversão sísmica isolada. (direita) resíduo dos dados para a inversão sísmica conjunta.

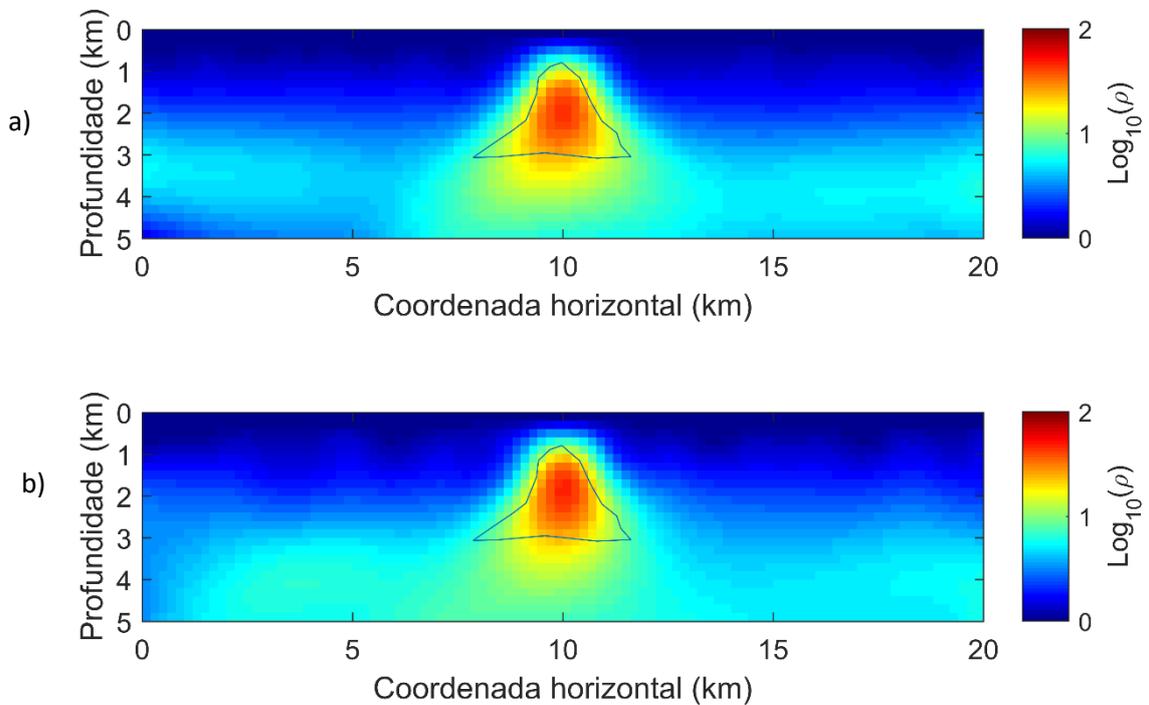


Figura 3.15: Inversões MT. a) MT isolada. b) MT conjunta.

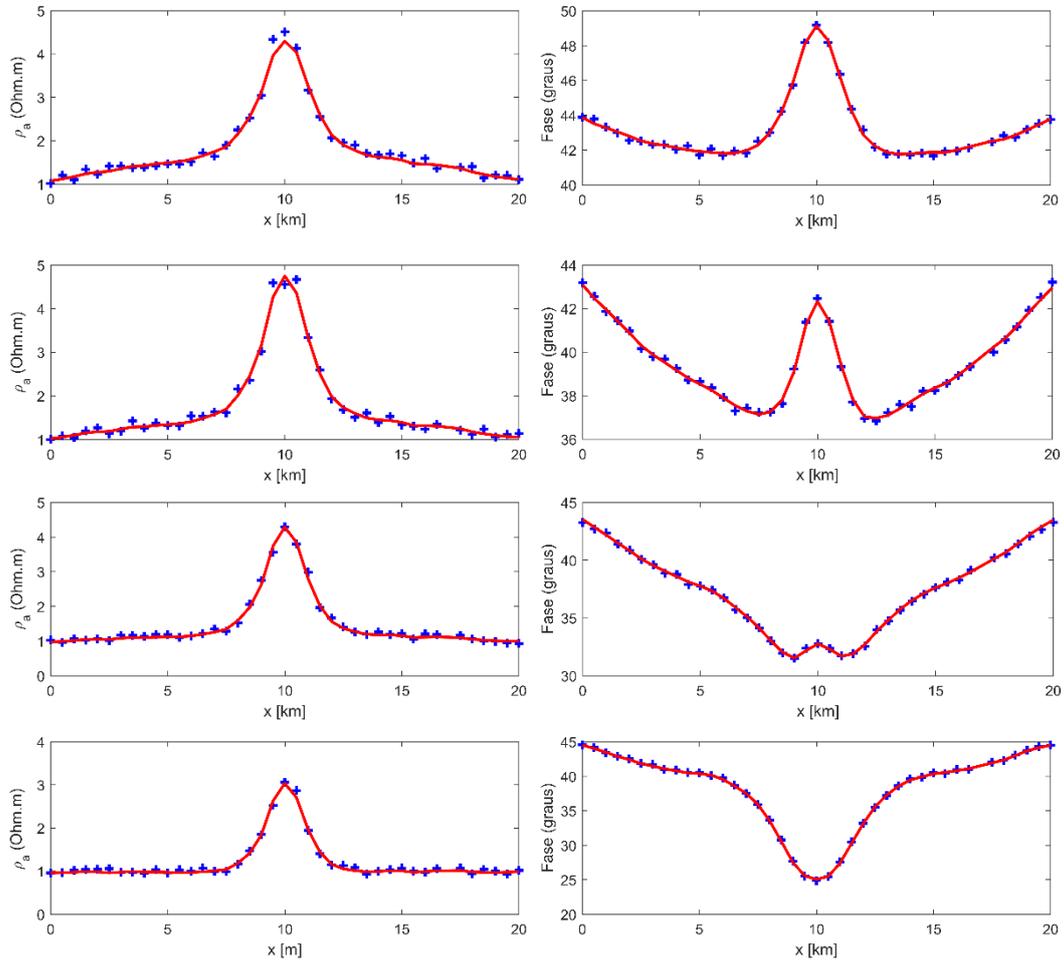


Figura 3.16: Ajustes da inversão MT isolada, resistividade aparente (esquerda) e fase (direita). De cima para baixo, frequências: 0.0125, 0.0250, 0.0500, 0.1000 Hz.

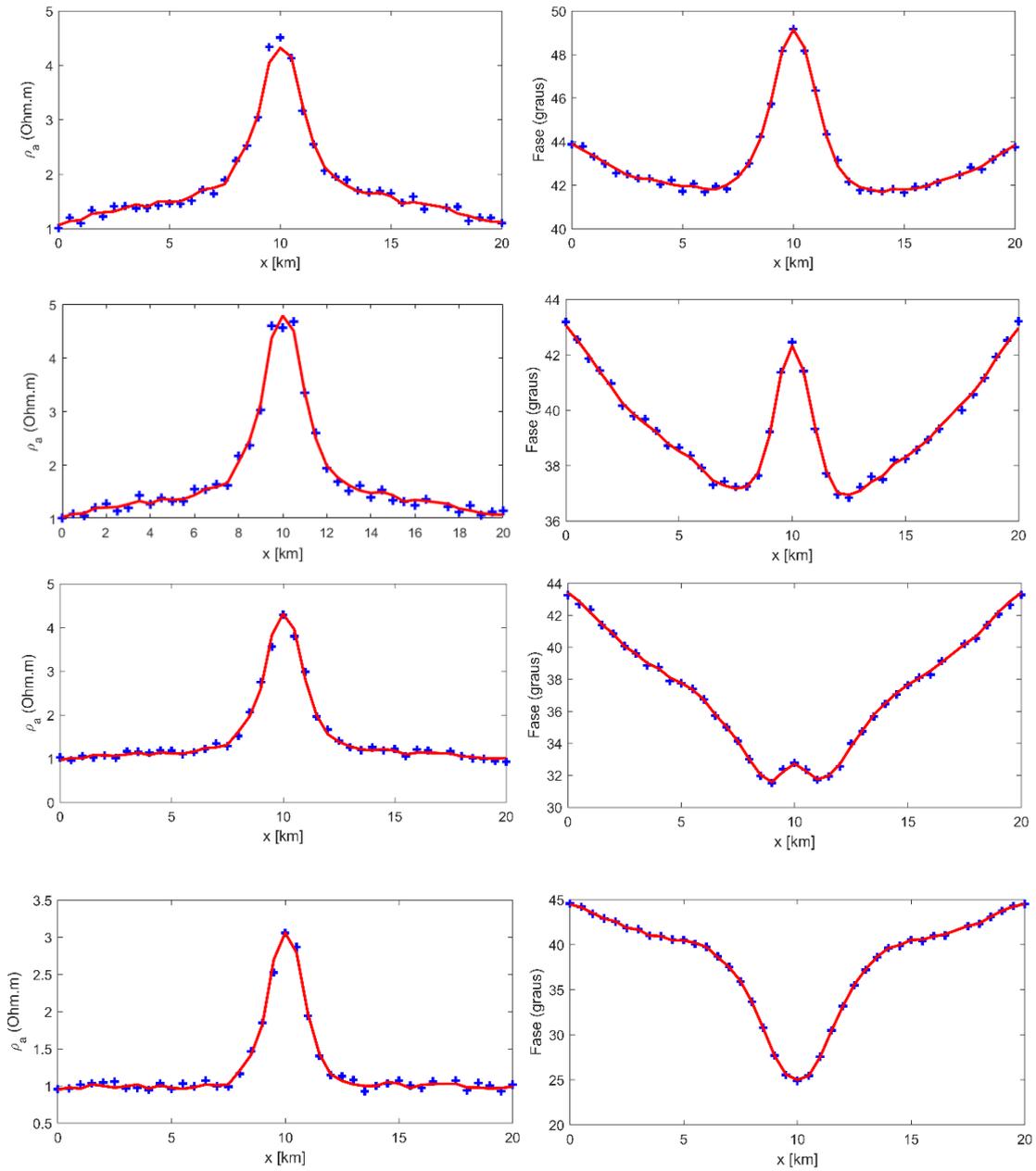


Figura 3.17: Ajustes da inversão MT conjunta, resistividade aparente (esquerda) e fase (direita). De cima para baixo, frequências: 0.0125, 0.0250, 0.0500, 0.1000 Hz.

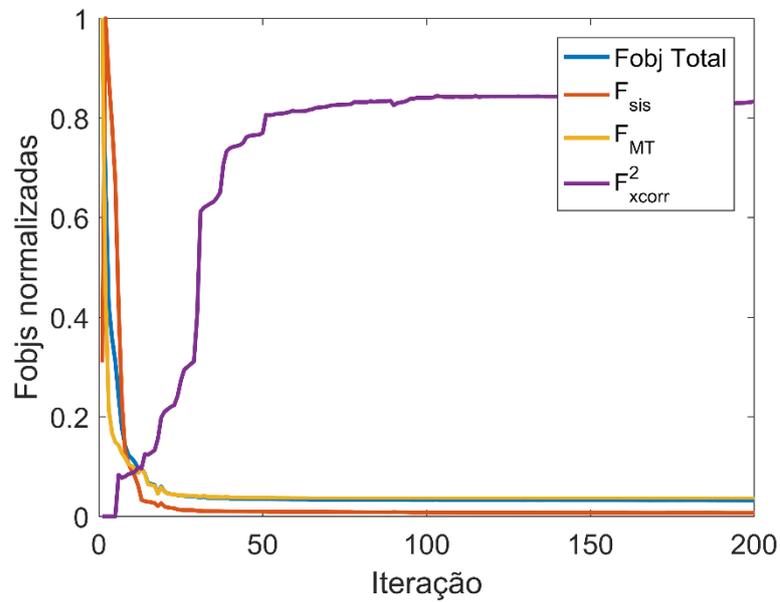


Figura 3.18: Comportamento das parcelas da função objetivo da inversão conjunta sísmica-MT. Fobj Total (Valor total da função objetivo (eq. 2.25); F_{sis} (Parcela da sísmica, eq. 2.26); F_{MT} (parcela do MT, eq.2.27) e F_{xcorr}² (eq. 2.28, coeficiente de correlação velocidade-log10(resistividade))

3.3.3 INVERSÃO CONJUNTA SÍSMICA – MT - GRAVIMETRIA

A inversão conjunta de dados sísmicos, gravimétricos e magnetotelúricos foi implementada fixando os parâmetros de correlação $\mu_{sg} = \mu_{se} = 25.0$. O valor de μ_g foi fixado em 0.001 e mantivemos a função peso para o modelo de densidade. Não utilizamos o termo de correlação entre condutividade elétrica e densidade, $\mu_{eg} = 0$. A seleção dos parâmetros de regularização envolveu apenas μ_s e μ_e . Após os experimentos numéricos de inversão conjunta com os dados contaminados por 20 realizações independentes de ruído pseudoaleatório uniforme selecionamos $\mu_s = 2.5$ e $\mu_e = 7.5$. Estes valores são menores que os selecionados na inversão conjunta de dados sísmicos-MT indicando uma melhoria na resolução da inversão conjunta devido à adição de dados gravimétricos. A Figura 3.19 mostra os modelos de velocidade estimados para quatro realizações independentes de ruído pseudoaleatório. A estabilidade das estimativas pode ser verificada pela mínima variação da velocidade na região em trono do sal para as quatro estimativas. A Figura 3.20 mostra que o mapa de resíduo de tempos trânsito está dentro do nível de ruído para a grande maioria das estações.

A Figura 3.21 mostra a estabilidade das estimativas de condutividade elétrica e as Figuras 3.22 e 3.23 mostram o ajuste das observações de resistividade aparente e fase. As Figuras 3.24 e 3.25 mostram, respectivamente, a estabilidade das estimativas de densidade e o ajuste dos dados observados. A verificação da estabilidade das soluções estimadas e do ajuste dos dados dentro do nível de ruído esperado validam o nosso fluxo de processamento para a inversão conjunta.

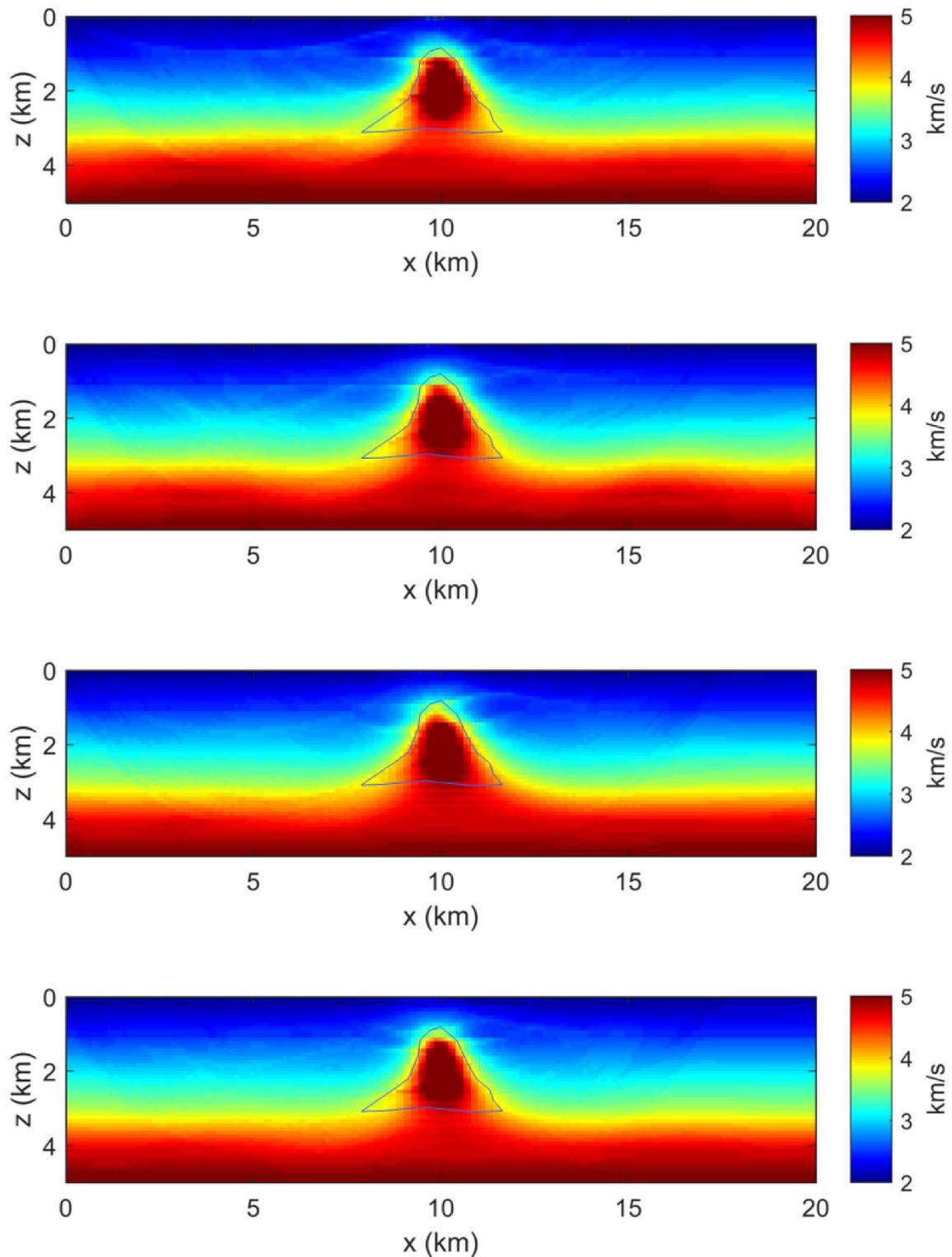


Figura 3.19: Distribuições de velocidade estimadas pela inversão conjunta sísmica-gravimetria-MT para dados contaminados com 4 realizações de ruído pseudo-aleatório uniforme. Os parâmetros de regularização foram $\mu_s = 2.5$, $\mu_g = 0.001$, $\mu_e = 7.5$ e $\mu_{sg} = \mu_{se} = 25.0$. O valor da correlação entre as distribuições de velocidade e densidade foi de 0.96.

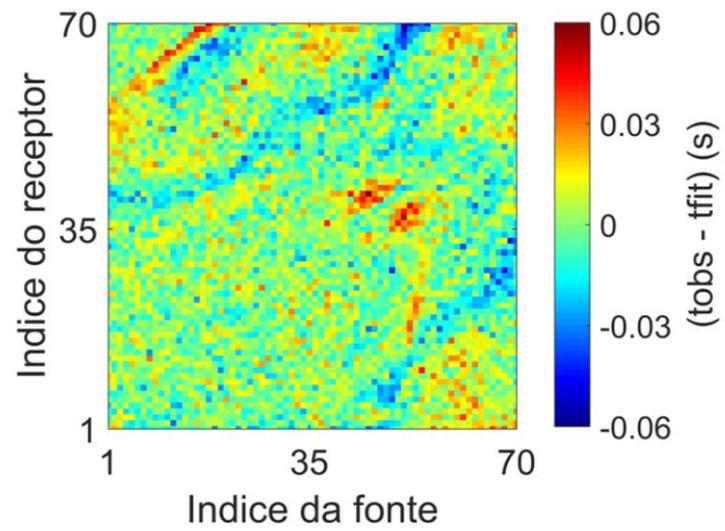


Figura 3.20: Inversão conjunta sísmica-gravimétrica-MT. Mapa de resíduos de tempo de trânsito. $(t_{obs} - t_{fit})$ representa a diferença entre dados observados e dados ajustados.

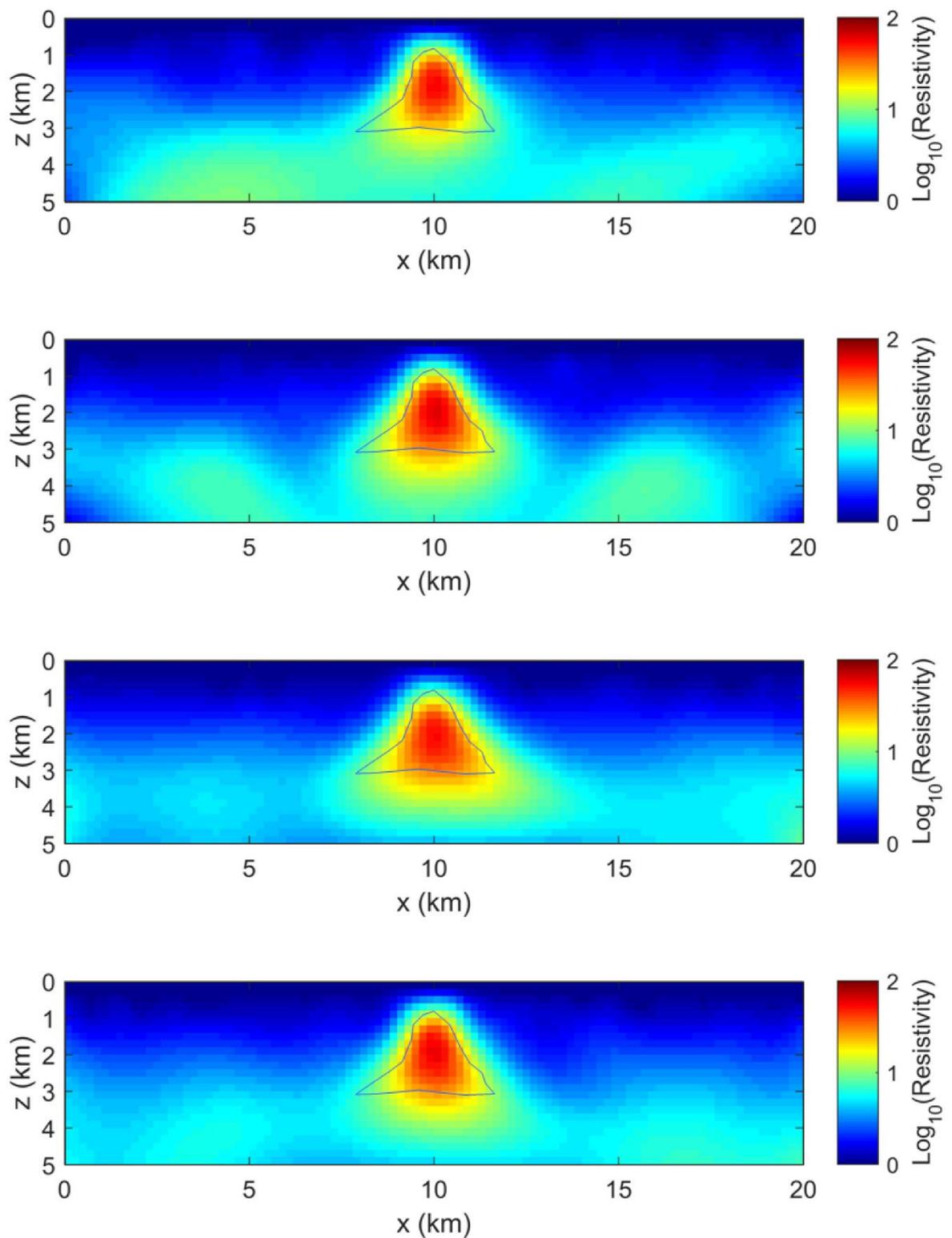


Figura 3.21: Distribuições de condutividade elétrica estimadas pela inversão conjunta sísmica-gravimetria-MT para dados contaminados com 4 realizações de ruído pseudoaleatório uniforme. Os parâmetros de regularização foram $\mu_s = 2.5$, $\mu_g = 0.001$, $\mu_e = 7.5$ e $\mu_{sg} = \mu_{se} = 25.0$.

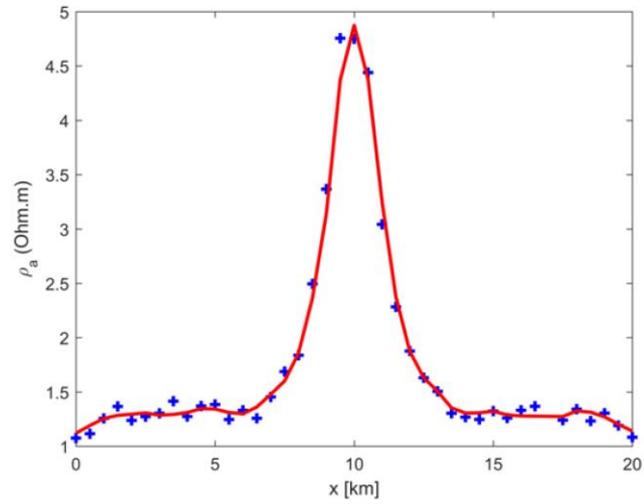


Figura 3.22: Inversão conjunta sísmica-MT. Ajuste da resistividade aparente de dados MT para a primeira frequência.

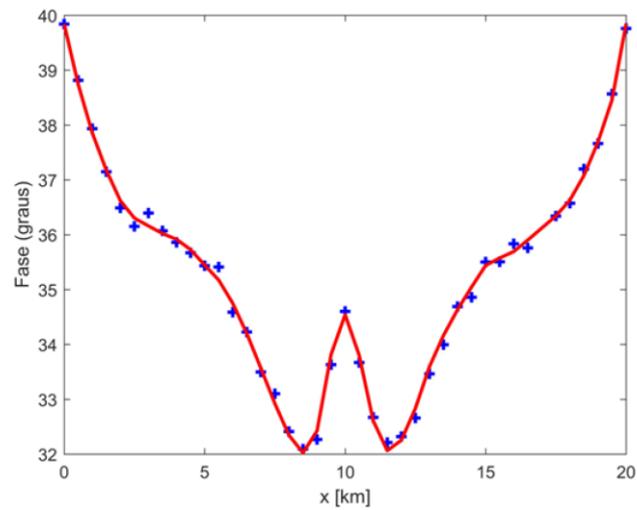


Figura 3.23: Inversão conjunta sísmica-MT. Ajuste da fase de dados MT para a primeira frequência.

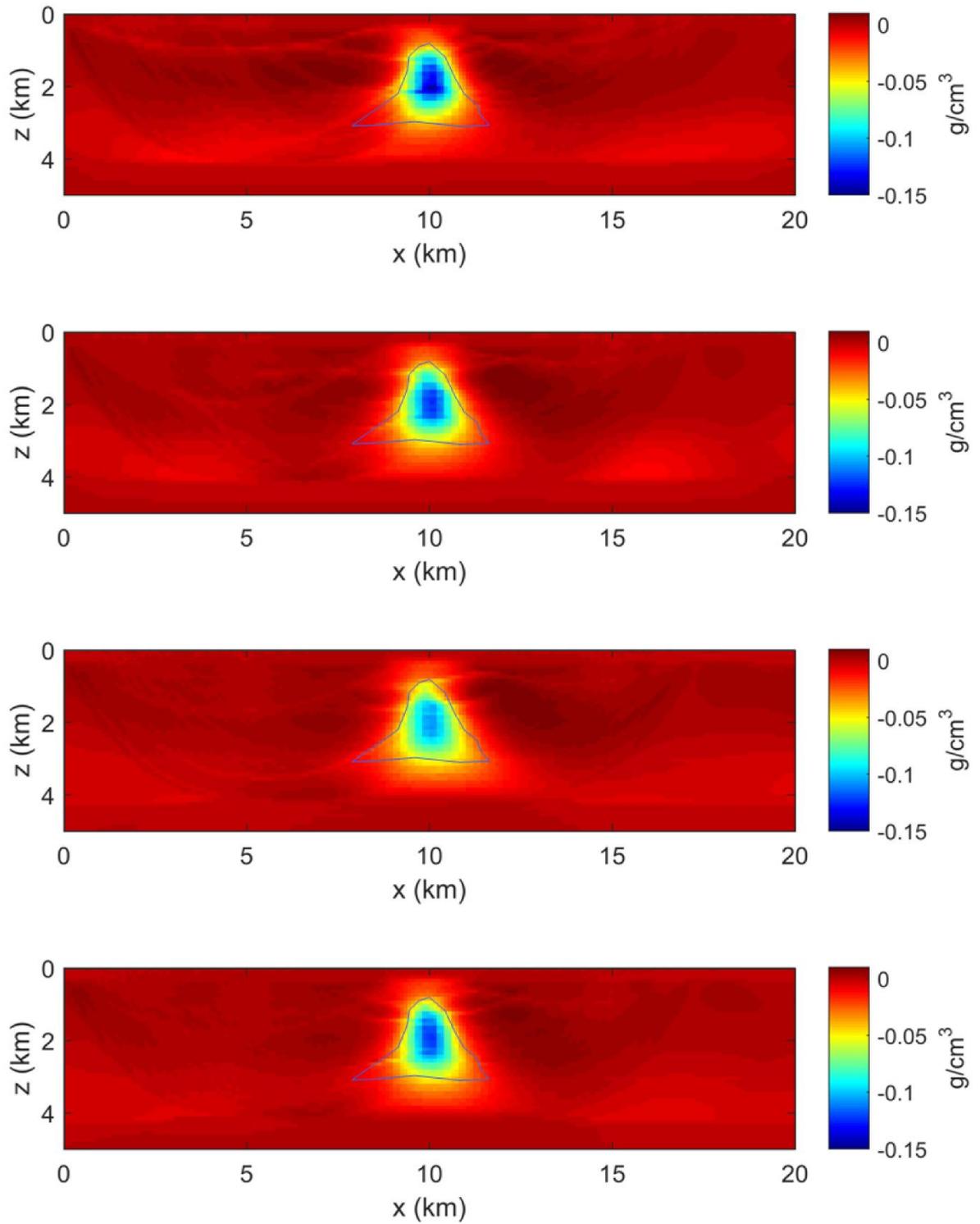


Figura 3.24: Distribuições de densidade estimadas pela inversão conjunta sísmicogravimetria-MT para dados contaminados com 4 realizações de ruído pseudo-aleatório uniforme. Os parâmetros de regularização foram $\mu_s = 2.5$, $\mu_g = 0.001$, $\mu_e = 7.5$ e $\mu_{sg} = \mu_{se} = 25.0$.

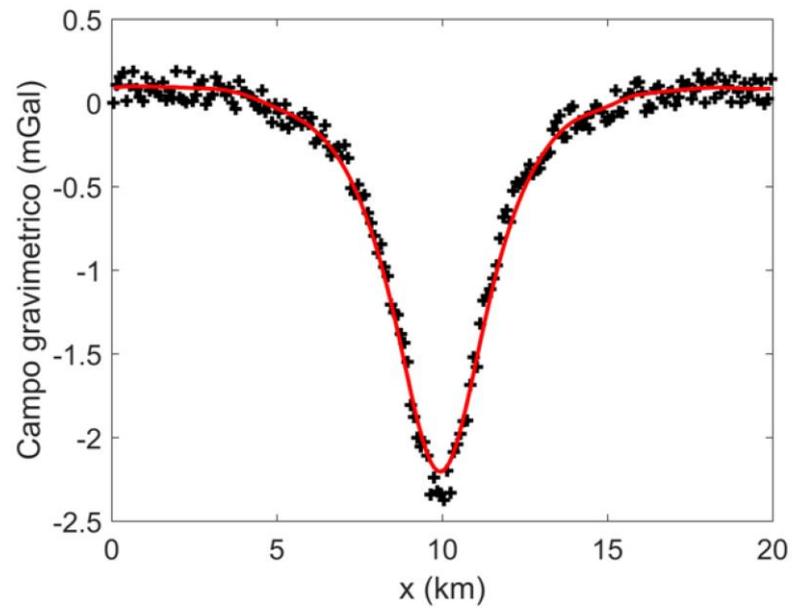


Figura 3.25: Inversão conjunta sísmica-MT. Ajuste de dados gravimétricos.

3.4 CONCLUSÕES

A aplicação da inversão conjunta ilustrada nos experimentos numéricos realizados com as inversões gravimétricas, sísmicas e MT, tanto isoladas como conjunta levou à caracterização de um importante efeito sinérgico da inversão conjunta em relação às inversões isoladas. Comparada à inversão sísmica isolada, a inversão sísmica conjunta com a gravimetria produziu um melhor delineamento, em profundidade, da forma do corpo anômalo, bem como uma estimação mais acurada da velocidade dentro do corpo. Essas melhorias foram possíveis graças à melhor definição dos gradientes horizontais de densidade conseguidos com a gravimetria na inversão conjunta. Este resultado já era esperado uma vez que a gravimetria define as variações horizontais de propriedade física melhor que a sísmica. A contribuição para a gravimetria na inversão conjunta com a sísmica consistiu na melhor definição da parte superior do corpo anômalo (domo salino). Os ganhos com a inversão conjunta entre sísmica e MT foram pequenos quando comparados aos respectivos resultados nas inversões isoladas, mas devemos considerar que os métodos geofísicos utilizados, na sísmica tomografia de tempo de trânsito apenas com eventos de transmissão e MT, são por si muito limitados em termos de resolução. No entanto, consideramos que os resultados são promissores e acreditamos que ganhos muito mais significativos podem ser conseguidos com a utilização de métodos de inversão geofísicos com maior poder de resolução.

CAPÍTULO 4

MATRIZ DE RESOLUÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Os resultados descritos na seção anterior sugerem como principal vantagem da inversão conjunta um aumento de resolução nos modelos, quando comparados aos modelos estimados pela inversão isolada. Para melhor quantificar este ganho de resolução, avaliamos as matrizes de resolução para os modelos estimados pela inversão conjunta, usando a metodologia desenvolvida nesta tese e descrita a seguir na seção 4.2, e comparamos com as matrizes correspondentes para os modelos estimados pela inversão isolada.

A resolução associada ao *kernel* de um operador que associa uma distribuição contínua de propriedade física a uma observação geofísica foi analisada teoricamente por Backus e Gilbert (1968). A extensão desta análise para o caso de um modelo interpretativo definido de modo único por um conjunto finito de parâmetros foi efetuada por Jackson (1972) e Wiggins (1972). A partir de então o conceito de resolução passou a ser amplamente aplicado na Geofísica (e.g. Yao et al, 1999; Xia et al., 2008; An, 2012; Vasco et al., 1998). A extensão do conceito de resolução para a inversão não linear apresenta diferentes abordagens na literatura. Uma abordagem completamente não linear através da simulação ou pesquisa de soluções não lineares em torno de uma solução aceitável usando Monte Carlo ou estratégias heurísticas de busca

(Mosegaard, 1998; Sambridge, 2001; Shimelevich et al., 2013). Estas abordagens são consistentes com a formulação original de Backus and Gilbert (1968), mas demandam um alto custo computacional em relação a abordagem para problemas lineares. Outra alternativa é o cálculo da matriz resolução para problemas não lineares através de linearização em torno de uma solução aceitável está amplamente reportado em Geofísica (e.g. Vasco et al. (1998); Yao et al. (1999); Xia et al. (2008); An (2012)). A matriz de resolução em um problema não linear representa uma relação linear que aproxima a relação entre perturbações no modelo e perturbações na solução em torno de um modelo de referência. Quando o modelo de referência está próximo à solução da inversão não linear, esta matriz de resolução é uma medida da precisão relativa entre os parâmetros obtidos pela inversão (An, 2012).

A resolução na inversão conjunta depende essencialmente da informação a priori que relaciona as diferentes propriedades físicas de cada método geofísico. Relações petrofísicas e vínculos de similaridade estrutural são as duas possibilidades mais comumente empregadas na interpretação geofísica (e.g., Gallardo-Delgado et al. (2003); Gallardo and Meju (2004); Gao et al. (2012); Zhdanov et al. (2012)). O interesse pela implementação e aplicação da inversão conjunta para interpretação de dados geofísicos tem crescido substancialmente recentemente no entanto, não encontramos na literatura qualquer artigo sobre a análise de resolução na inversão conjunta. Entretanto, partindo da aproximação de Gauss-Newton consistente com a função-objetivo não linear utilizada na inversão conjunta, a análise de resolução pode ser formulada de maneira simples, similarmente a qualquer outro problema não linear conforme descrito por An (2012).

4.2 METODOLOGIA

A solução de um problema de inversão não linear de dados geofísicos pode ser implementada através de iterações lineares. Em cada iteração a aproximação, \mathbf{p}_0 , é atualizada considerando-se apenas a otimização da expansão da função-objetivo, ϕ até segunda ordem (Press et al., 2007). Para a inversão isolada, considerando-se que o problema está regularizado através de um operador \mathbf{D} , o problema a ser resolvido a cada iteração é determinar

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} \left[\nabla_{\mathbf{p}_0}^T \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \nabla_{\mathbf{p}_0} \nabla_{\mathbf{p}_0}^T \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right] \cdot \quad (4.1)$$

Para o caso da inversão isolada de dados geofísicos utilizando regularização de Tikhonov a função-objetivo é expressa por

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p}))^T (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p})) + \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{p}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p} \quad (4.2)$$

consequentemente, as equações

$$\nabla_{\mathbf{p}_0} \varphi = -\nabla_{\mathbf{p}_0}^T \mathbf{f} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_0)) + \mu^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}_0 \quad (4.3)$$

$$\nabla_{\mathbf{p}_0} \nabla_{\mathbf{p}_0}^T \varphi = \nabla_{\mathbf{p}_0}^T \mathbf{f} \nabla_{\mathbf{p}_0} \mathbf{f} + \nabla_{\mathbf{p}_0} \nabla_{\mathbf{p}_0}^T \mathbf{f} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_0)) + \mu^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \quad (4.4)$$

são válidas.

A aproximação de Gauss-Newton consiste em desconsiderar a segunda parcela na equação (4.4). Definindo $\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) \equiv \nabla_{\mathbf{p}_0} \mathbf{f}$, $\delta \mathbf{d}(\mathbf{p}_0) \equiv \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$ e $\delta \hat{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0$, a solução de (4.1) satisfaz o sistema linear

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \delta \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{d} - \mu^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}_0 \quad (4.5)$$

A solução do sistema 4.5 por quadrados mínimos pode ser escrita na forma

$$\delta \hat{\mathbf{p}} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\delta\mathbf{d} - \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{p}_0] \quad (4.6)$$

ou ainda,

$$\delta \hat{\mathbf{p}} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0)\delta\mathbf{p} - \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{p}_0] \quad (4.7)$$

Definindo

$$\delta\mathbf{p}_0 \equiv \mu^2 [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{p}_0 \quad (4.8)$$

segue que

$$\delta \hat{\mathbf{p}} + \delta\mathbf{p}_0 = [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0)\delta\mathbf{p}. \quad (4.9)$$

A partir desta expressão a matriz de resolução pode ser definida por

$$\mathbf{R} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \mu^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{A}^T(\mathbf{p}_0)\mathbf{A}(\mathbf{p}_0)] \quad (4.10)$$

Para a inversão conjunta não linear utilizamos como regularizadores, além de funcionais de suavização, funcionais de correlação cruzada, os quais avaliam a similaridade geométrica entre as soluções associadas às diferentes propriedades físicas. Para o caso particular da inversão conjunta de dados sísmicos e gravimétricos, similarmente ao caso da inversão não linear isolada, em cada iteração do método Gauss-Newton a atualização do modelo é obtida pela solução do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T\mathbf{A}_s + \mu_s^2\mathbf{D}^T\mathbf{D} + \mu_c^2\mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2\mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2\mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T\mathbf{A}_g + \mu_g^2\mathbf{D}^T\mathbf{D} + \mu_c^2\mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p}^s \\ \delta\mathbf{p}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T\delta\mathbf{d}^s - \mu_s^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{p}_0^s - \mu_c^2\chi(\mathbf{p}_0^g - \langle\mathbf{p}_0^g\rangle) \\ \mathbf{A}_g^T\delta\mathbf{d}^g - \mu_g^2\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{p}_0^g - \mu_c^2\chi(\mathbf{p}_0^s - \langle\mathbf{p}_0^s\rangle) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

na qual

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{gg} &\equiv (\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle)(\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle)^T, \\
\mathbf{C}_{ss} &\equiv (\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle)(\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle)^T, \\
\mathbf{C}_{sg} &\equiv (\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle)(\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle)^T, \\
\mathbf{C}_{gs} &\equiv (\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle)(\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle)^T, \\
\chi &\equiv (\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle)^T(\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para chegarmos a este resultado desconsideramos termos envolvendo a segunda derivada de χ . A dedução deste resultado está detalhada no Apêndice A.

Definindo os vetores δp_0^s e δp_0^g como as soluções do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s + \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2 \mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2 \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g + \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p}_0^s \\ \delta \mathbf{p}_0^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}_0^s + \mu_c^2 \chi (\mathbf{p}_0^g - \langle \mathbf{p}_0^g \rangle) \\ \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{p}_0^g + \mu_c^2 \chi (\mathbf{p}_0^s - \langle \mathbf{p}_0^s \rangle) \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

as perturbações do modelo de velocidade e do modelo de densidade consistentes com as regularizações utilizadas na inversão conjunta satisfazem, respectivamente, às relações:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s + \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2 \mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2 \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g + \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p}^s + \delta \mathbf{p}_0^s \\ \delta \mathbf{p}^g + \delta \mathbf{p}_0^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \delta \mathbf{d}^s \\ \mathbf{A}_g^T \delta \mathbf{d}^g \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

A partir desta expressão cada coluna da matriz de resolução para a inversão conjunta associada exclusivamente aos parâmetros da sísmica, r_j^{ss} , pode ser computada resolvendo-se

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s + \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2 \mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2 \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g + \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j^{ss} \\ \mathbf{r}_j^{gs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s \mathbf{e}_j \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

na qual $\mathbf{e}_j = [\delta_{ij}]$ as colunas r_j^{gs} informam sobre o acoplamento entre os parâmetros da gravimetria e da sísmica resultantes da correlação cruzada utilizada como informação a priori na inversão conjunta. Analogamente, as colunas da matriz de resolução associadas aos parâmetros da gravimetria, r_j^{sg} e r_j^{gg} , são obtidas das soluções do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s + \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2 \mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2 \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g + \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j^{sg} \\ \mathbf{r}_j^{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g \mathbf{e}_j \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

A solução dos sistemas lineares nas equações 4.15 e 4.16 pode ser representada na forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s + \mu_s^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{gg} & \mu_c^2 \mathbf{C}_{sg} \\ \mu_c^2 \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g + \mu_g^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mu_c^2 \mathbf{C}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{ss} & \mathbf{R}^{sg} \\ \mathbf{R}^{gs} & \mathbf{R}^{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_g^T \mathbf{A}_g \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

As matrizes de resolução \mathbf{R}^{ss} e \mathbf{R}^{gg} resultam da exigência que as perturbações em torno das soluções do problema não linear, p_0^s e p_0^g , preservem a mesma suavidade e a mesma correlação que as soluções do problema inverso não linear.

4.3 TESTES NUMÉRICOS

A etapa final de nossa análise da inversão conjunta é avaliar os possíveis ganhos de resolução dos modelos estimados em relação as duas inversões conjuntas, sísmica-gravimetria e sísmica-MT, apresentadas anteriormente. A Figura 4.1 mostra a comparação entre o modelo de velocidade estimado na inversão conjunta sísmica-MT e o modelo de velocidade estimado da inversão sísmica-gravimetria-MT. É marcante nesta comparação o ganho de resolução na região da base do domo de sal, em nossa interpretação resultante da combinação da resolução vertical da combinada da sísmica e do MT e da maior resolução lateral da gravimetria em relação a estes dois métodos. A Figura 4.2 permite comparar o modelo de condutividade elétrica da inversão de dados sísmicos-MT com a condutividade elétrica resultante da inversão sísmica-gravimetria-MT. O ganho de resolução vertical na base do sal é inequívoco, embora menos pronunciado que entre os modelos de velocidade na Figura 4.1. Finalmente, a Figura 4.3 permite comparar o modelo de densidade obtido pela inversão de dados sísmicos e gravimétricos com o modelo de densidade estimado pela inversão sísmica-gravimetria-MT. O ganho na resolução do contraste de densidade estimado pela inversão sísmica-gravimetria-MT é incontestável e muito mais pronunciado que o ganho de resolução no modelo de condutividade elétrica. Nesta seção comparamos as resoluções das inversões isoladas e conjuntas obtidas através da aplicação das equações (4.10) e (4.17) respectivamente. As matrizes de resolução foram calculadas para as soluções obtidas no capítulo 3. Portanto, esta última seção fecha o fluxo de inversão definido nesta tese o qual corresponde a: i) seleção de um valor ótimo para o parâmetro de regularização (Capítulo 2), ii) inversão (Capítulo 3) e iii) análise de resolução (Capítulo 4).

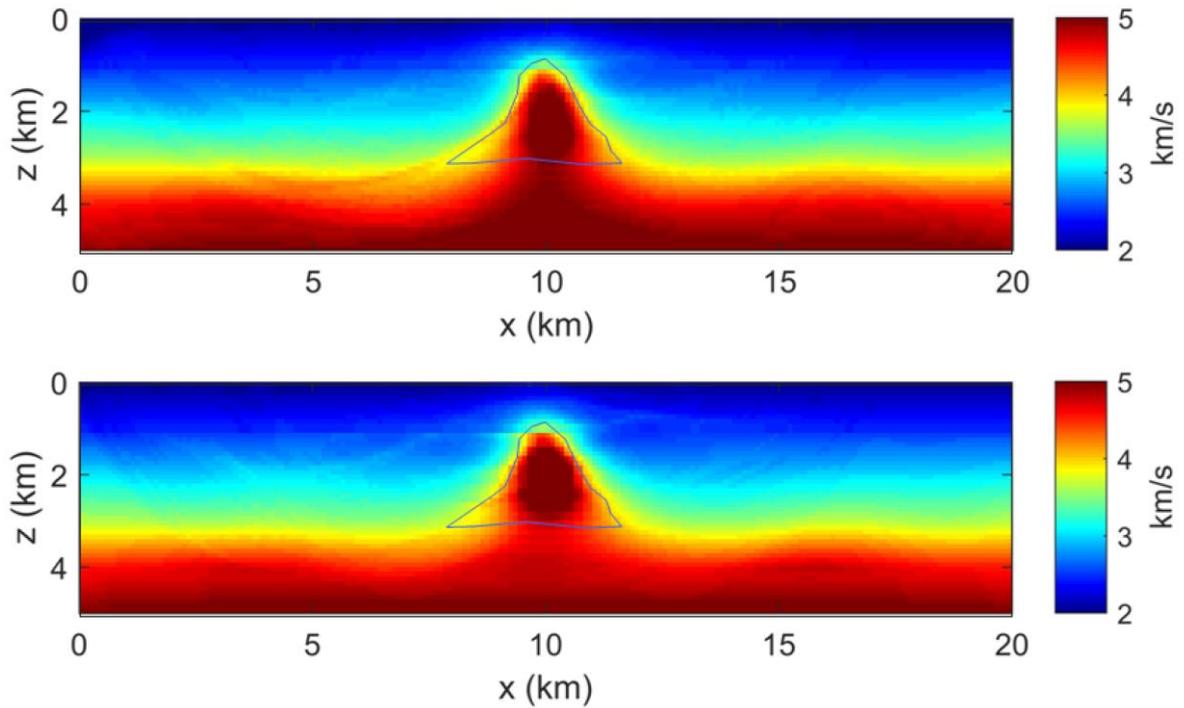


Figura 4.1: Modelo de velocidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimetria (acima), modelo de velocidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimétrica-MT (abaixo).

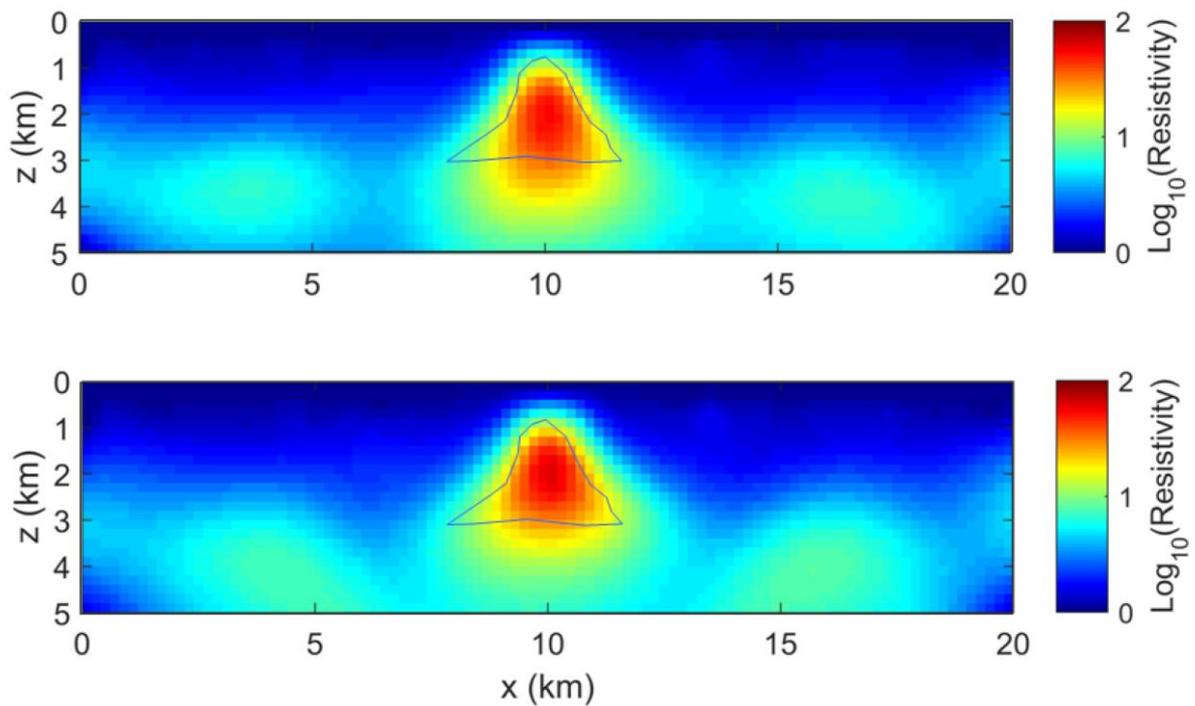


Figura 4.2: Modelo de condutividade elétrica estimado pela inversão conjunta sísmica-MT (acima), modelo de densidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimétrica-MT (abaixo).

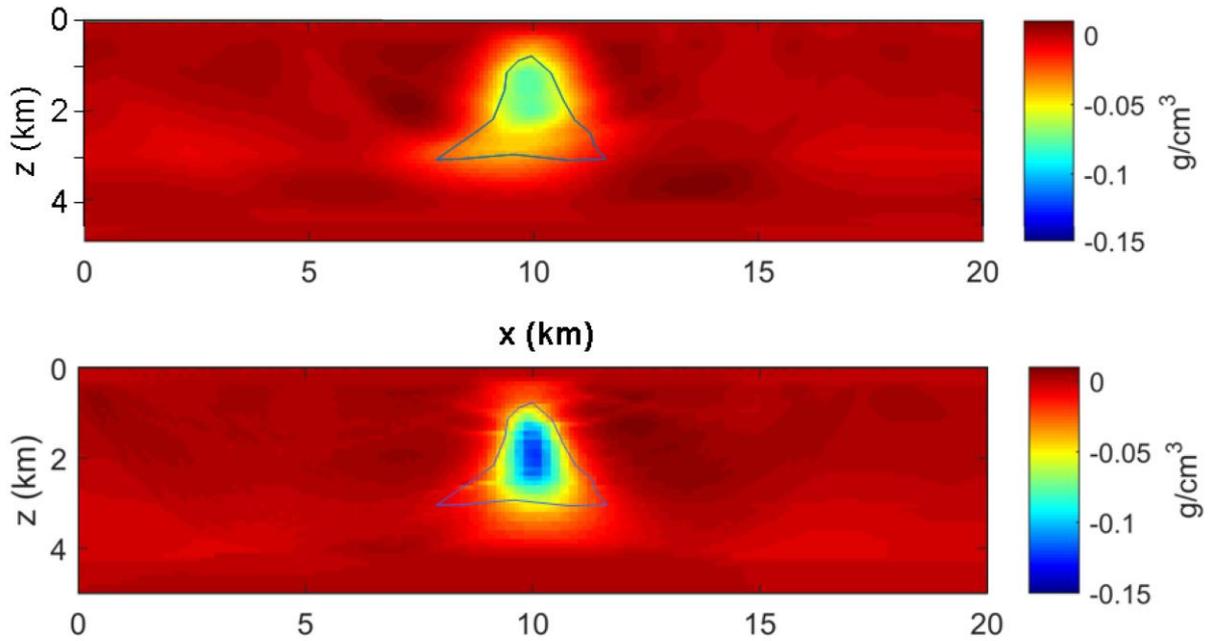


Figura 4.3: Modelo de densidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimétrica (acima), modelo de densidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimétrica-MT (abaixo).

4.3.1 INVERSÃO CONJUNTA SÍSMICA-GRAVIMETRIA

A seguir fazemos uma análise das resoluções obtidas considerando apenas os elementos da diagonal das matrizes de resolução projetadas no plano x - z . Os gráficos assim obtidos permitem visualizar as resoluções no mesmo domínio da inversão de tal forma a facilitar a interpretação e a correlação com a geologia sendo simulada nestes experimentos numéricos.

As Figuras 4.4a, 4.4b mostram respectivamente os mapas de resolução obtidos para a inversão sísmica isolada e conjunta utilizando utilizando $\mu_{sis} = 6.0$. As Figuras 4.5a e 4.5b mostram o mapa de resolução para a gravimetria isolada. Note o confinamento dos máximos valores da resolução a uma camada horizontal, em acordo com o fato bem conhecido de a gravimetria apresentar ótima resolução horizontal e péssima resolução vertical. Observamos um ganho, nas resoluções conjuntas relativamente à inversão isolada. Com a inversão conjunta

é possível diminuir o peso dos vínculos de suavidade devido à interação das soluções através do vínculo de similaridade. Essa diminuição contribui para um ganho extra e importante de resolução uma vez que com um peso menor aos vínculos de suavidades degradamos menos a resolução pela inclusão destes termos necessários a estabilização da solução.

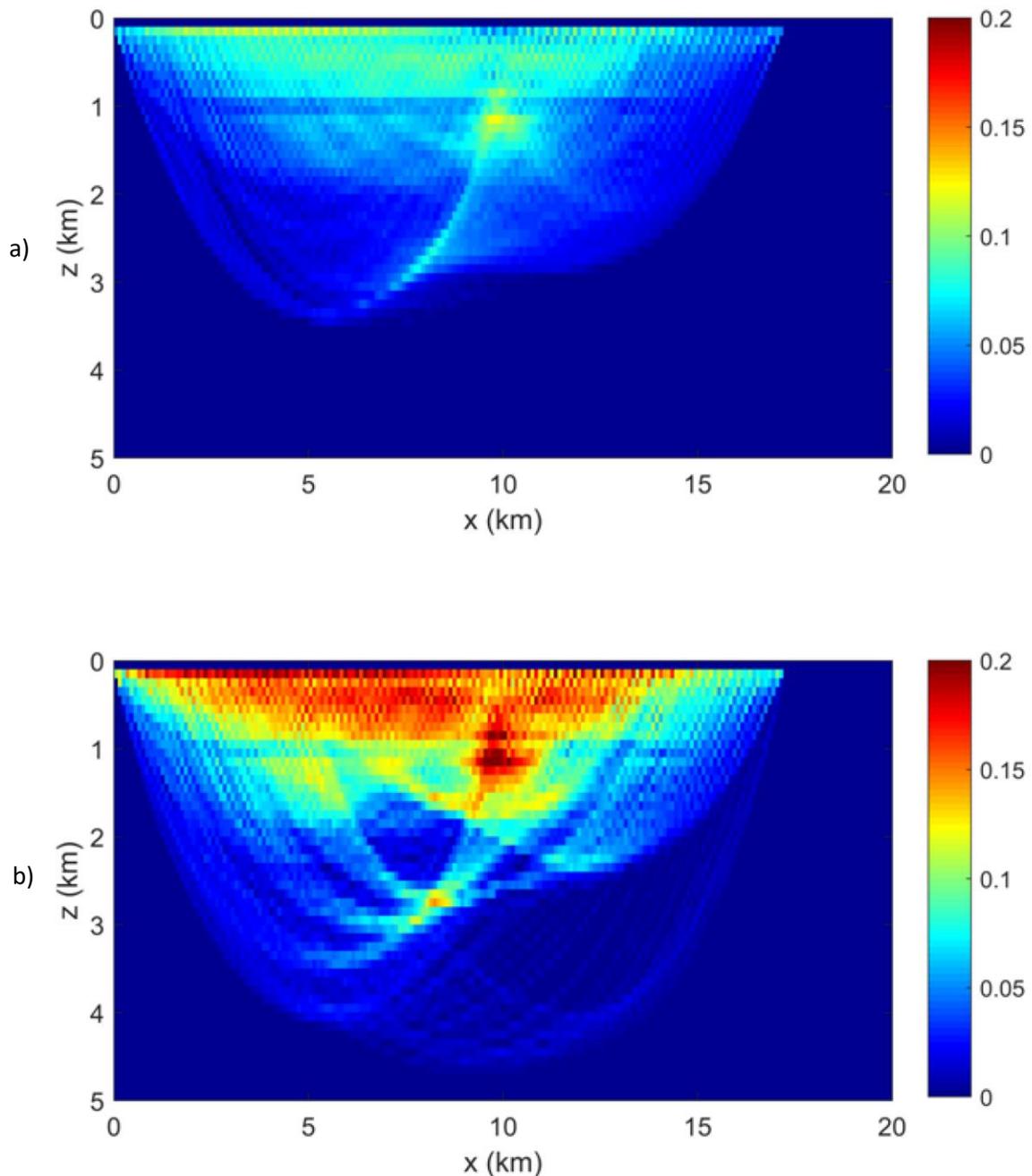


Figura 4.4: Diagonal da matriz de resolução para o modelo de velocidade estimado pela inversão sísmica isolada (a) e para o modelo estimado de velocidade pela inversão conjunta sísmica-gravimetria (b).

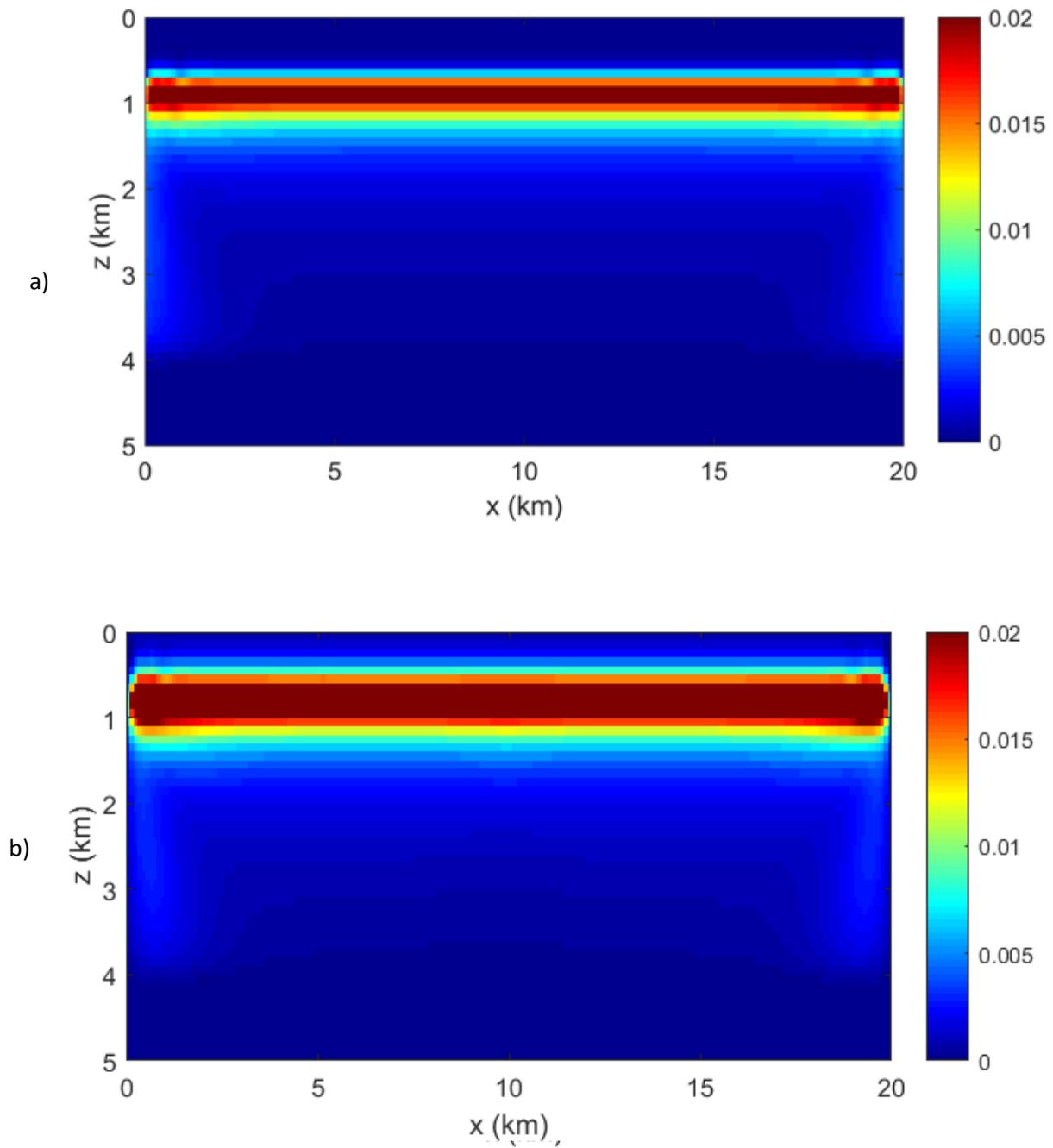


Figura 4.5: Diagonal da matriz de resolução para o modelo de densidade estimado pela inversão gravimétrica isolada (a) e para o modelo de densidade estimado pela inversão conjunta sísmica-gravimetria (b).

4.3.2 INVERSÃO CONJUNTA SÍSMICA-MT

Repetimos aqui os procedimentos descritos na seção anterior para a análise da resolução obtida para inversão conjunta utilizando sísmica e MT. As Figuras 4.6a e 4.6b mostram respectivamente os mapas de resolução para a sísmica associados as soluções da inversão isolada e conjunta com MT como descrito na seção 3.3.2. Lembramos que um dos fatores mais importantes para o ganho na resolução é a diminuição do parâmetro de regularização associado ao vínculo de suavidade que no caso da inversão sísmica isolada foi fixado em $\mu_s = 8.0$ e para a inversão conjunta em $\mu_s = 6.0$. Mas podemos perceber também na Figura 4.6b um ganho de resolução na parte mais inferior do domo. Interpretamos este ganho como sendo em parte devido a ação do vínculo de correlação e do sinergismo decorrente da inversão simultânea da sísmica com MT. Os mapas de resolução para as inversões MT, isolada e conjunta com sísmica são mostrados nas Figuras 4.7a e 4.7b respectivamente.

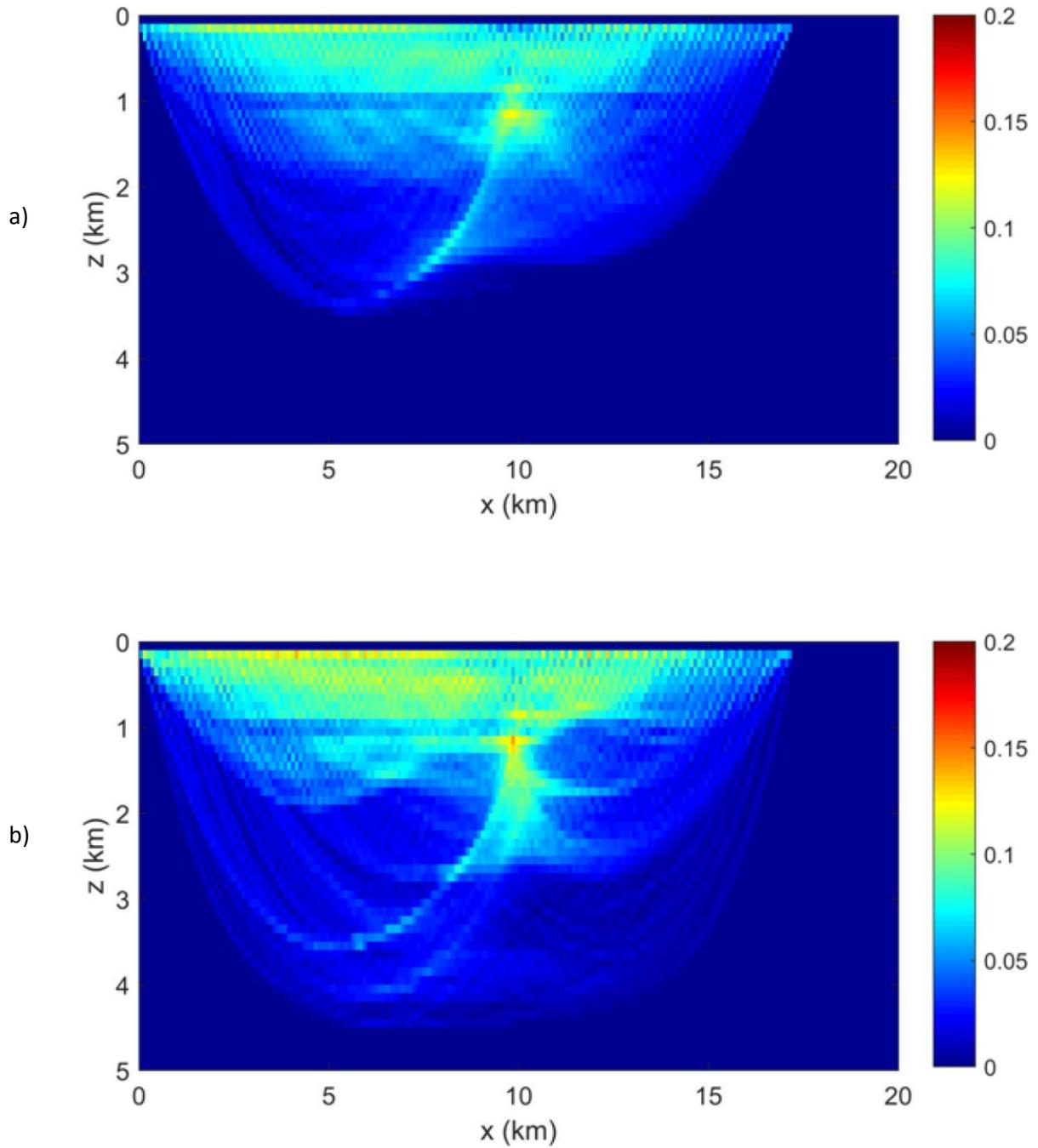


Figura 4.6: Mapas de resolução para sísmica. a) inversão isolada, b) inversão conjunta com MT.

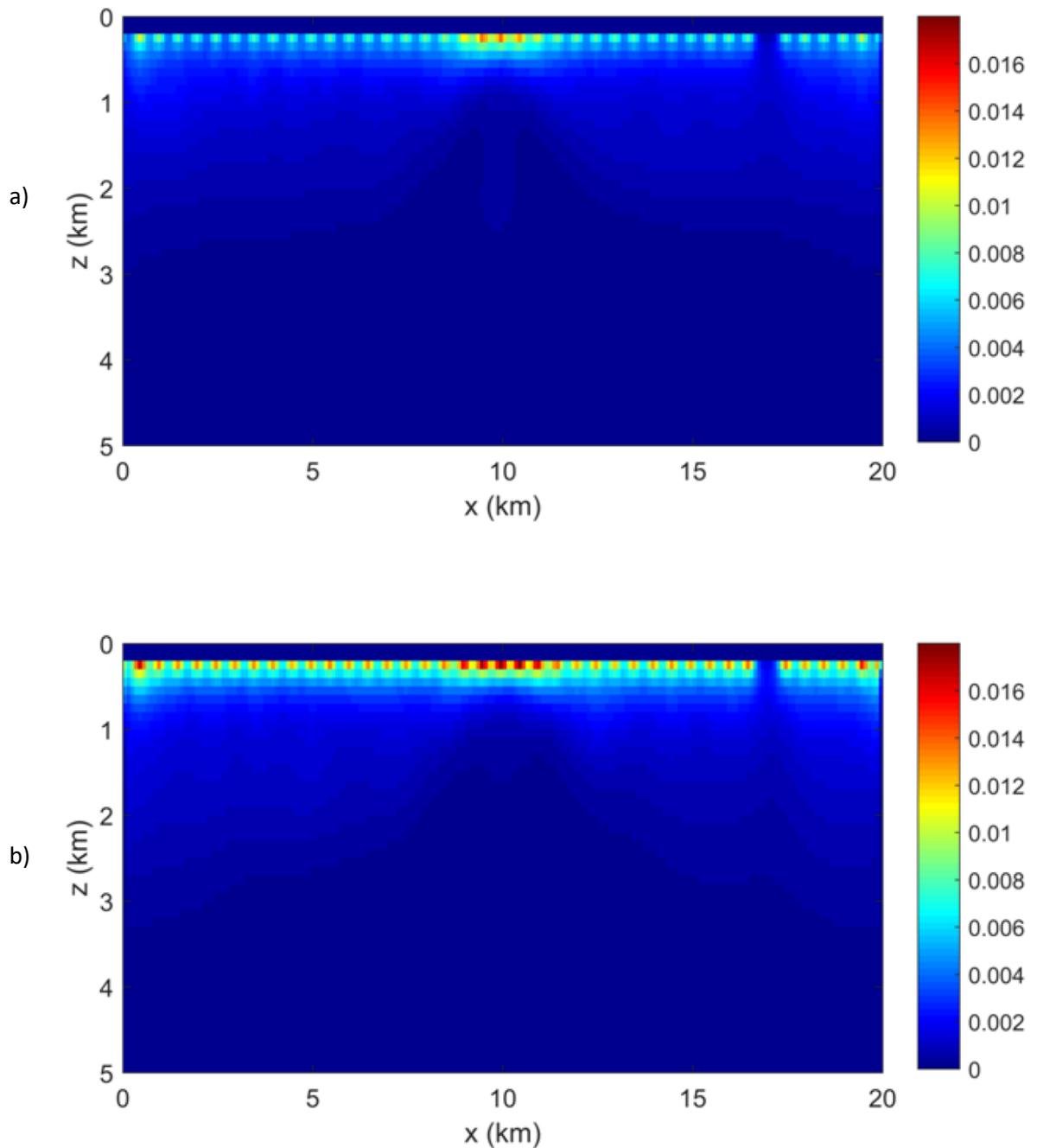


Figura 4.7: Diagonal da matriz de resolução para o modelo de condutividade elétrica estimado a) pela inversão MT isolada e b) para o modelo estimado pela inversão conjunta sísmica-MT (abaixo).

4.4 CONCLUSÕES

A matriz de resolução em Geofísica tem se mostrado um poderoso instrumento para quantificar o que pode ser extraído dos dados em um problema geofísico inverso. Para a inversão de um conjunto de dados apenas, a teoria é bem estabelecida e tem sido amplamente aplicada na prática. No caso da inversão conjunta de dados provenientes de diferentes métodos geofísicos não há uma teoria geral sobre o assunto e não é de conhecimento do autor qualquer abordagem particular para o cálculo da matriz de resolução para o caso de uma inversão conjunta.

Neste capítulo apresentamos uma proposta que estende a matriz de resolução para inversão de múltiplos conjuntos de dados. O método foi testado em dados sintéticos simulando a inversão conjunta de dados sísmicos e gravimétricos e também sísmicos e magnetotelúricos. Os resultados obtidos foram coerentes e de acordo com o esperado, mostrando que a resolução da inversão conjunta é sempre maior ou igual que a de cada inversão isolada. Este resultado é decorrente do fato que a inversão conjunta acrescenta ao problema parte da informação demandada pelo intérprete e que não estava contida nos dados, permitindo assim que a degradação da resolução, em troca de maior estabilidade, seja menor.

5 CONCLUSÕES GERAIS

Apresentamos uma abordagem para quantificar a redução da incerteza das estimativas de parâmetros na inversão conjunta. A medida escolhida foi a resolução dos parâmetros, aproximada pelo valor diagonal da matriz de resolução. Pelo conhecimento do autor, esta é a primeira formulação para o cálculo desta matriz voltada a uma inversão conjunta. Tal formulação combinou os melhores aspectos dos vínculos petrofísicos e estruturais, que são os vínculos integradores da inversão conjunta. Sem eles, a inversão conjunta não será diferente das inversões isoladas de cada conjunto de dados.

Na inversão conjunta, usamos como vínculo estrutural o coeficiente de correlação entre os parâmetros associados aos diferentes métodos geofísicos. O uso do coeficiente de correlação ao invés da tradicional *cross-gradient* apresenta algumas vantagens como medir diretamente a similaridade entre duas imagens, ao invés da similaridade entre os gradientes das imagens. Além disso, o valor do coeficiente de correlação (entre -1 e +1) indica diretamente o quão semelhantes (+1), diferentes (0) ou antagônicas (-1) são as soluções de cada método isolado.

Para o cálculo da matriz de resolução proposta é crucial que a estimativa do parâmetro de regularização empregado no processo de inversão seja ótima. Para tanto, desenvolvemos um método que estabelece em bases físicas um critério ótimo para estimação desse parâmetro. Além disso, o método desenvolvido leva em consideração que instabilidade é uma condição subjetiva que depende grandemente do objetivo do intérprete.

REFERÊNCIAS

- ABUBAKAR, A., GAO, G., HABASHY, T. M. E LIU, J., 2012, Joint inversion approaches for geophysical electromagnetic and elastic full-waveform data: *Inverse Problems* 28.
- ABUBAKAR, A., LI, M., PAN, G., LIU, J., E HABASHY, T. M., 2011, Joint MTand CSEM data inversion using a multiplicative cost function approach: *Geophysics*, 76, N. 3, F203–F214.
- ABUBAKAR, A., E P. M. VAN DEN BERG, 2000, Iterative reconstructions of electrical conductivity from multiexperiment low-frequency electro-magnetic data: *Radio Science*, 35, 1293–1306, SEG, Expanded Abstracts, 26, 482–486.
- AN, M., 2012, A simple method for determining the spatial resolution of a general inverse problem: *Geophysical Journal International*, 191, 849-864.
- ARCHIE, G. E., 1942, The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics: *Transactions of the American Institute of Mechanical Engineers*, 146, 54–67.
- BACKUS, G. E., E F. GILBERT, 1968, The resolving power of gross Earth data: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 16, 169-205.
- BAHR, K., 1983, Joint interpretation of magnetotelluric and geomagnetic data and local telluric distortions: *J. of Geomag. Geoelec.*, 35, 555–566.
- BIRGIN, E. G., J. M. MARTINEZ, AND M. RAYDAN, 2000, Nonmonotone spectral projected gradient methods for convex sets: *SIAM Journal on Optimization* 10, 1196-1211.
- BONESKY, T., 2009, Morozov's discrepancy principle and Tikhonov-type functionals: *Inverse Problems*, 015015.
- CHEN, J. E HOVERSTEN, G. M., 2012, Joint inversion of marine seismic AVA and CSEM data using statistical rock-physics models and Markov random fields: *Geophysics*, 77, N. 1, R65–R80.
- COLOMBO, D. E DE STEFANO, M., 2007, Geophysical modeling via simultaneous joint inversion of seismic, gravity, and electromagnetic data: Application to prestack depth imaging: *The Leading Edge*, 26, 326-331.
- CONSTABLE, S. C., R. L., PARKER, AND C. G. CONSTABLE, 1987, Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data: *Geophysics*, 52, 289-300.
- DEGROOT-HEDLIN, C., AND S. CONSTABLE, 1990, Occams' inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data: *Geophysics*, 55, 1613-1624.

DELL'AVERSANA, P., 2003, Integration loop of 'global offset' seismic, continuous profiling magnetotelluric and gravity data: *First Break*, **21**, 32-41.

DE STEFANO, M., ANDREASI, F. G., RE, S., VIRGILIO, M. E SNYDER, F. F., 2011, Multiple-domain, simultaneous joint inversion of geophysical data with application to subsalt imaging: *Geophysics*, **76**, N. 3, R69–R80.

DOICU, A., F. SCHREIER, AND M. HESS, 2002, Iteratively regularized Gauss–Newton method for atmospheric remote sensing: *Computer Physics Communications* **148**, 214–226.

FREGOSO, E. E GALLARDO, L. A., 2009, Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data: *Geophysics*, **74**, N. 4, L31–L42.

GALLARDO, L. A. , 2007, Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging: *Geophysical Research Letters*, **34**.

GALLARDO, L. A. E MEJU, M. A., 2004, Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints: *Journal Of Geophysical Research*, **109**.

GALLARDO-DELGADO, L. A., PÉREZ-FLORES, M. A. E GÓMEZ-TREVIÑO, E., 2003, A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data: *Geophysics*, **68**, 949–959.

GAO, G., ABUBAKAR, A. E HABASHY, T. M., 2012, Joint petrophysical inversion of electromagnetic and full-waveform seismic data: *Geophysics*, **77**, N. 3, WA3–WA18.

GARDNER, G.H.F., GARDNER, L.W., E GREGORY, A.R., 1974, Formation velocity and density – The diagnostic basics for stratigraphic traps: *Geophysics.*, **39**, 770-780.

GASSMANN, F., 1951, Über die elastizität poröser medien: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, **96**, 1–23.

GOLUB, G. H., M. HEATH, AND G. WHABA, 1979, Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter: *Techometrics*, **21**, 215-223.

GOLIZDRA G. Y., 1980, Statement of the problem of comprehensive interpretation of gravity fields and seismic observations: *Izvestiya Earth Physics*, **16**, 535–9

GUSPÍ, F., E INTROCASO, A., 1988, Gravity, its gradients, simultaneous inversion and magnetism — A critical study: *Geoexploration*, **25**, 103-112.

HABER, E. E OLDENBURG, D., 1997, Joint inversion: a structural approach: *Inverse Problems* **13**, 63–77.

HABER, E., AND D. OLDENBURG, 2000, A GCV based method for nonlinear ill-posed problems: *Computational Geosciences*, **4**, 41-63.

HANKE, M. 1996, Limitations of the *L*-curve method in ill-posed problems: *BIT*, **36**, 287-301.

HANSEN, P. C., 2001, The *L*-Curve and its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems, in Johnston, P., ed., *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, WIT Press, 119-142.

HARINARAYANA, T., 1999, Combination of EM and DC measurements for upper crustal studies: *Surveys in Geophysics* **20**: 257–278.

HEINCKE, B., JEGEN, M. E HOBBS, R., 2006, Joint inversion of MT, gravity and seismic data applied to sub-basalt imaging: *SEG Expanded Abstracts* **25**, 784-789.

HERING, A., MISIEK, R., GYULAI, A., ORMOS, T., DOBROKA, M., E DRESEN, L., 1995, A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data; Part I, Basic ideas: *Geophys. Prosp.*, **43**, 135–156.

HOU, Z., RUBIN, Y., HOVERSTEN, G., M., VASCO, D. E CHEN, J., 2006, Reservoir-parameter identification using minimum relative entropy-based Bayesian inversion of seismic AVA and marine CSEM data: *Geophysics*, **71**, N. 6, O77–O88.

HOVERSTEN, G., M., CASSASSUCE, F., GASPERIKOVA, E., NEWMAN, G. A., CHEN, J., RUBIN, Y, HOU, Z. E VASCO, D., 2006, Direct reservoir parameter estimation using joint inversion of marine seismic AVA and CSEM data: *Geophysics*, **71**, N. 3,C1–C13.

HU, W., ABUBAKAR, A, E HABASHY, T. M., 2009a, Simultaneous multifrequency inversion of full-waveform seismic data: *Geophysics*, **74**, N. 2, R1–R14.

HU, W., ABUBAKAR, A. E HABASHY, T. M., 2009b, Joint electromagnetic and seismic inversion using structural constraints: *Geophysics*, **74**, N. 6, R99–R109.

JAGANNATH, R. P. K., AND P. K. YALAVARTHY, 2012, Minimal residual method provides optimal regularization parameter for diffuse optical tomography: *Journal of Biomedical Optics* **17** (10), 106015-1 - 106015-7.

JACKSON, D. D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient, and inconsistent data: *Geophy. J. R. Astr. Soc.*, **28**, 97-110.

JARDANI, A. E REVIL, A., 2009, Stochastic joint inversion of temperature and self-potential data: *Geophys. J. Int.*, **179**, 640–654.

KALININA. T. B., 1976 Statistical algorithms for interpreting magnetic and gravitational anomalies: *Izvestiya Earth Physics*, **8**, 62–67.

KRAHENBUHL, R. A., LI, Y., 2012, Time-lapse gravity: A numerical demonstration using robust inversion and joint interpretation of 4D surface and borehole data: *Geophysics*, **77**, N. 2, G33–G43

LELIÈVRE, P. G., 1, FARQUHARSON, C. G. E HURICH, C. A., 2012, Joint inversion of seismic traveltimes and gravity data on unstructured grids with application to mineral exploration: *Geophysics*, **77**, N. 1, K1–K15.

LI, Y., AND D. OLDENBURG, 2000, 3-D inversion of induced polarization data: *Geophysics*, **65**, 1931–1945.

LINES, L. R., SCHULTZ, A. K. E TREITEL, S., 1988, Cooperative inversion of geophysical data: *Geophysics*, **53**, 8-20.

MARQUARDT. D. W., 1963, An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**, 431–441.

MEAD, J. L., AND C. C. HAMMERQUIST, 2013, Tests for the choice of the regularization parameter in nonlinear inverse problems: *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, **34**, no. 3, 1213-1230.

MITSUHATA, Y., T. UCHIDA, AND H. AMANO, 2002, 2.5-D inversion of frequency domain electromagnetic data generated by a grounded-wire source: *Geophysics*, **67**, 1753–1768.

MOROZOV, V. A., 1966, On the solution of functional equations by the method of regularization: *Soviet Math. Dokl.*, **7**, 414-417.

OLDENBURG, D.W., LI, Y., E ELLIS, R.G., 1994, Joint interpretation of DC, IP, magnetic, airborne EM, geological, and mineralization data; a case history from Mt. Milligan: *SEG Annual Meeting Expanded Technical Program Abstracts with Biographies*, **64**, 512–515.

NETTLETON, L. L., 1976, *Gravity and magnetics in oil prospecting*: McGraw-Hill Book Co

O'SULLIVAN, F., AND G. WAHBA., 1985, A cross validated Bayesian retrieval algorithm for non-linear remote sensing experiments: *Journal of Computational Physics*, **59**, 441–455.

PARKER, R. O., 1994, *Geophysical Inverse Problems*: Princeton University Press.

PARKER, R. L , 1977, Understanding inverse theory, *Ann. Rev. Earth and Planet. Sci.*, **5**, 35-64.

PILKINGTON, M., 2006, Joint inversion of gravity and magnetic data for two-layer models: *Geophysics*, **71**, N. 3, L35–L42.

PORTNIAGUINE, O., AND M. S. ZHDANOV, 2002, 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing: *Geophysics*, **67**, 1532–1541.

ROY, A., 1962, Ambiguity in geophysical interpretation: *Geophysics*, **27**, 90-99.

ROY, L., SEN, M. K., MCINTOSH, K., STOFFA, P. L. E NAKAMURA, Y., 2005, Joint inversion of first arrival seismic travel-time and gravity data: *J. Geophys. Eng.*, **2**, 277–289.

SASAKI, Y., 1989, Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data: *Geophysics*, **54**, 254-262.

SANTOS, F. A. M. E EL-KALIOUBY, H. M., 2011, Quasi-2D inversion of DCR and TDEM data for shallow investigations: *Geophysics*, **76**, N. 4, F239–F250.

SERPA, L. F., E K. L. COOK, 1984, Simultaneous inversion modeling of gravity and aeromagnetic data applied to a geothermal study in Utah: *Geophysics*, **49**, 1327–1337.

SCHERZER, O., 1993, The Use of Morozov's Discrepancy Principle for Tikhonov Regularization for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems: *Computing*, **51**, no. 1, 45-60.

SETHIAN, J.A., 1999, Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science, v. 3, Cambridge University Press.

SILL, W.R., BOSTICK, F.X., HOHMANN, G.W., PETRICK, W., PHILLIPS R.J., STODT, J., SWIFT C.M., TRIPP, A., E WARD, S.H., 1977, Resistivity structure in southwestern Utah based on magnetotelluric and deep resistivity measurements: *Geophysics*, **42**, 1539.

SILVA, J. B. C., W. E. MEDEIROS, AND V. C. F. BARBOSA, 2001, Pitfalls in nonlinear inversion: *Pure and Applied Geophysics*, **158**, 945-964.

SKEELS, D. C., 1947, Ambiguity in gravity interpretation: *Geophysics*, **12**, 43-56.

STANICA, D. E STANICA, M., 1993, An electrical resistivity lithospheric model in the Carpathian Orogen from Romania, in: The V. R. S. Hutton symposium; Electromagnetic studies of the continents: *Phys. of the Earth and Plan. Int.*, **81**, 99–105.

TIKHONOV, A. N., 1963, Regularization of ill-posed problems: *Doklady Akad. Nauk, SSSR*, **153**, 49-52.

TIKHONOV, A. N., AND V. Y. ARSENIN, 1977, *Solutions of ill-posed problems*: V. H. Winston & Sons.

UCHIDA, T., 1993, Smooth 2-D Inversion for magnetotelluric data based on statistical criterion ABIC: *Journal of. Geomagnetism and Geoelectricity*, **45**, 841–858.

VAN DEN BERG, P. M., A. L. VAN BROEKHOVEN, E A. ABUBAKAR, 1999, Extended contrast source inversion: *Inverse Problems*, **15**, 1325–1344.

VASCO, D. W., J. E. PETERSON, JR., E E. L. MAJER, 1998, Resolving seismic anisotropy: Sparse matrix methods for geophysical inverse problems: *Geophysics*, **63**, 970-983.

VATANKHAH, S., V. E. ARDESTANI, AND R. A. RENAUT, (2014), Automatic estimation of the regularization parameter in 2D focusing gravity inversion: Application of the method to the Safo manganese mine in the northwest of Iran: *Journal of Geophysics and Engineering*, **11**(4), [045001-1].

VOGEL, C. R., 1996, Non-convergence of the *L*-curve regularization parameter selection method: *Inverse Problems*, **12**, 535–547.

VOZZOFF, K., E JUPP, D.L.B., 1975, Joint inversion of geophysical data: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **42**, 977-991.

WANG, H., ZHANG, W., E XIE, J., 1993, Iterative algorithm for joint inversion of gravimetric and seismic data in layered medium, *Shiyou Diqui Wuli Kantan: Oil Geophys. Prosp.*, **28**, 153–165.

WANNAMAKER, P. E. , J. A. STODT, AND L. RIJO, 1987, A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling: *Geophysical Journal International*, **88**, 277-296.

WIGGINS, R. A., 1972, The General Linear Inverse Problem: Implication of Surface Waves and Free Oscillations for Earth Structure: *Reviews Of Geophysics And Space Physics*, **10**, No. 1, 251-285

XIA, J. , R. D. MILLER, E E Y. XU, 2008, Data-resolution Matrix and Model-resolution Matrix for Rayleigh-wave Inversion Using a Damped Least-squares Method: *Pure and Applied Geophysics*, **165**, 1227–1248.

XU, Y., Y. PEI, AND F. DONG, 2016, An extended *L*-curve method for choosing a regularization parameter in electrical resistance tomography: *Measurement Science and Technology*, **27**, No. 11, doi:10.1088/0957-0233/27/11/114002.

YAO, Z. S., R. G. ROBERTS, E A. TRYGGVASON, 1999, Calculating resolution and covariance matrices for seismic tomography with the LSQR method: *Geophysical Journal International*, **138**, No. 3, 886-894.

ZHDANOV, M. S., ALEXANDER GRIBENKO, A. E WILSON, G., 2012, Generalized joint inversion of multimodal geophysical data using Gramian constraints: *Geophysical Research Letters*, **39**

ZHDANOV, M. S., ELLIS, R., , E MUKHERJEE, S., 2004, Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data: *Geophysics*, **69**, 925–937.

ZHDANOV, M. S., S. FANG, AND G. HURSAN, 2000, Electromagnetic inversion using quasi-linear approximation: *Geophysics*, **65**, 1505.

APENDICE

APÊNDICE A – A aproximação de Gauss-Newton na inversão conjunta

A seguir apresentamos a dedução da aproximação de Gauss-Newton para a atualização dos parâmetros em uma iteração linear da inversão conjunta. Partimos da função-objetivo da inversão conjunta com regularizadores de suavidade e correlação cruzada, Ψ , expressa em notação indicial:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{p}^s, \mathbf{p}^e, \mathbf{p}^g) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} [d_i^s - f_i^s(\mathbf{p}^s)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} [d_i^e - f_i^e(\mathbf{p}^e)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_g} [d_i^g - f_i^g(\mathbf{p}^g)]^2 \\
 &+ \frac{\mu_s^2}{2} \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^s \right)^2 + \frac{\mu_e^2}{2} \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^e \right)^2 + \frac{\mu_g^2}{2} \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^g \right)^2 \\
 &+ \frac{\mu_{se}^2}{2} \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \right]^2 \\
 &+ \frac{\mu_{sg}^2}{2} \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right]^2 \\
 &+ \frac{\mu_{eg}^2}{2} \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right]^2,
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

na qual, N_s indica o número de observações da aquisição sísmica, N_e número correspondente para o experimento eletromagnético e N_g o número de observações da aquisição gravimétrica; o vetor $\mathbf{p}^s \equiv [p_i^s]$ contém os parâmetros associados a velocidade de propagação de ondas P, $\mathbf{p}^e \equiv [p_i^e]$ contém os parâmetros descrevendo a condutividade elétrica e $\mathbf{p}^g \equiv [p_i^g]$ a distribuição de densidade de massa; a componente d_i^s contém a observação registrada no experimento sísmico na i -ésima estação, d_i^e e d_i^g as observações correspondentes aos

experimentos eletromagnético e gravimétrico, respectivamente; $f_i^s(p^s)$ o resultado da simulação numérica do experimento sísmico na i -ésima estação, $f_i^e(p^e)$ e $f_i^g(p^g)$ indicam as simulações correspondentes para os casos eletromagnético e gravimétrico, respectivamente; $D \equiv [D_{ij}]$ representam os operadores diferenciais associados a suavidade; μ_s, μ_e e μ_g indicam os parâmetros de regularização associados, respectivamente, a suavidade das propriedades elásticas, a suavidade condutividade elétrica e a suavidade da densidade de massa; μ_{se}, μ_{sg} e μ_{eg} os parâmetros de regularização associados, respectivamente, à correlação entre a velocidade da onda sísmica e a condutividade elétrica, à correlação entre a velocidade da onda sísmica e a densidade de massa e à correlação entre a densidade de massa e a densidade de massa; $u \equiv [u_i]$ é um vetor com todas as componentes iguais a $1/\sqrt{M}$.

O primeiro passo para avaliar a aproximação de Gauss-Newton é determinar as expressões para o gradiente e o Hessiano da função-objetivo em relação aos parâmetros. A partir da expressão para determinamos todas as componentes do vetor gradiente abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial p_k^s} &= - \sum_{i=1}^{N_s} [d_i^s - f_i^s(\mathbf{p}^s)] \frac{\partial f_i^s}{\partial p_k^s} + \mu_s^2 \sum_{i=1}^M D_{ik} \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^s \right) \\ &+ \mu_{se}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \right] \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \\ &+ \mu_{sg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right), \end{aligned} \quad \text{A-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial p_k^e} &= - \sum_{i=1}^{N_e} [d_i^e - f_i^e(\mathbf{p}^e)] \frac{\partial f_i^e}{\partial p_k^e} + \mu_e^2 \sum_{i=1}^M D_{ik} \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^e \right) \\ &+ \mu_{se}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \right] \left(p_k^s - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \\ &+ \mu_{eg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right), \end{aligned} \quad \text{A-3}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial p_k^g} &= - \sum_{i=1}^{N_g} [d_i^g - f_i^g(\mathbf{p}^g)] \frac{\partial f_i^g}{\partial p_k^g} + \mu_g^2 \sum_{i=1}^M D_{ik} \left(\sum_{j=1}^M D_{ij} p_j^g \right) \\
&+ \mu_{sg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] \left(p_k^s - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \\
&+ \mu_{eg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right).
\end{aligned} \tag{A-4}$$

A partir destas expressões para o gradiente, avaliamos todas as componentes da matriz Hessiana. Para melhor identificar os elementos desconsiderados na aproximação de Gauss-Newton para o Hessiano, estes termos aparecem em vermelho nas expressões para as componentes do Hessiano apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_i^s \partial p_k^s} &= \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\partial f_i^s}{\partial p_i^s} \frac{\partial f_i^s}{\partial p_k^s} - \sum_{i=1}^{N_s} [d_i^s - f_i^s(\mathbf{p}^s)] \frac{\partial^2 f_i^s}{\partial p_i^s \partial p_k^s} + \mu_s^2 \sum_{i=1}^M D_{il} D_{ik} \\
&+ \mu_{se}^2 \left(p_l^e - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \\
&+ \mu_{sg}^2 \left(p_l^g - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \\
&+ \mu_{se}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \right] (\delta_{lk} - u_k u_l) \\
&+ \mu_{sg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] (\delta_{lk} - u_k u_l),
\end{aligned} \tag{A-5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^e \partial p_k^s} &= \mu_{se}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \\
&+ \mu_{se}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^e - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \right] (\delta_{lk} - u_k u_l)
\end{aligned} \tag{A-6}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^g \partial p_k^s} &= \mu_{sg}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \\
&+ \mu_{sg}^2 \left[\sum_{i=1}^M \left(p_i^s - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_i^g - u_i \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \right] (\delta_{lk} - u_k u_l)
\end{aligned} \tag{A-7}$$

Para aproximação de Gauss-Newton vamos desconsiderar os termos envolvendo as segundas derivadas de f_i^s , f_i^e e f_i^g , bem como os termos envolvendo as segundas derivadas das correlações cruzadas entre o parâmetros. Com estas considerações a aproximação de Gauss-Newton para o Hessiano de Ψ tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^s \partial p_k^s} &\approx \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\partial f_i^s}{\partial p_l^s} \frac{\partial f_i^s}{\partial p_k^s} + \mu_s^2 \sum_{i=1}^M D_{il} D_{ik} \\
&+ \mu_{se}^2 \left(p_l^e - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \\
&+ \mu_{sg}^2 \left(p_l^g - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right),
\end{aligned} \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^e \partial p_k^e} &\approx \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial f_i^e}{\partial p_l^e} \frac{\partial f_i^e}{\partial p_k^e} + \mu_e^2 \sum_{i=1}^M D_{il} D_{ik} \\
&+ \mu_{se}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^s - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \\
&+ \mu_{eg}^2 \left(p_l^g - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right),
\end{aligned} \tag{A-9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^g \partial p_k^g} &\approx \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial f_i^g}{\partial p_l^g} \frac{\partial f_i^g}{\partial p_k^g} + \mu_g^2 \sum_{i=1}^M D_{il} D_{ik} \\
&+ \mu_{sg}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^s - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \\
&+ \mu_{eg}^2 \left(p_l^e - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right), \tag{A-10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^e \partial p_k^s} &\approx \mu_{se}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^e - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right), \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^g \partial p_k^s} &\approx \mu_{sg}^2 \left(p_l^s - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^s \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right), \tag{A-11} \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_l^g \partial p_k^e} &\approx \mu_{eg}^2 \left(p_l^e - u_l \sum_{j=1}^M u_j p_j^e \right) \left(p_k^g - u_k \sum_{j=1}^M u_j p_j^g \right).
\end{aligned}$$

Utilizando as expressões A-8 a A-11 obtivemos o sistema linear para a atualização do modelo na inversão conjunta, equação 4.13.